JEVY NA ROZHRANÍ TŘÍ PROSTŘEDÍ

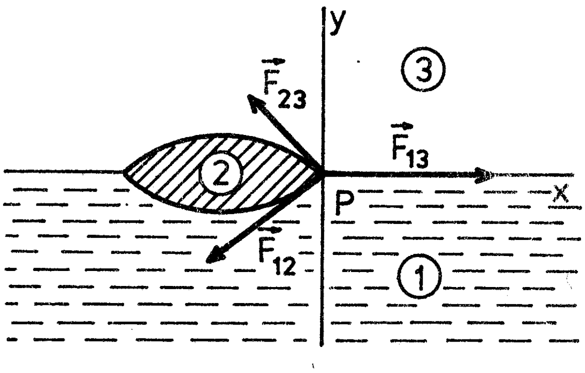
Kapka kapaliny na hladině kapaliny

Na hladinu (viz OBR. 11) kapaliny (1), nad níž je plynné prostředí (3), kápneme kapku jiné kapaliny (2). Vzniklé tři povrchové vrstvy (kapalina 1 – kapalina 2; kapalina 1 – plyn 3; kapalina 2 – plyn 3) se spolu stýkají podél „rovníku“ kapky. Na každý úsek délky Δl společného rozhraní působí tři povrchové síly $\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{23}$, $\vec{F}_{13}$ (dvojice indexů samozřejmě odpovídají indexům jednotlivých prostředí). Označíme-li analogicky příslušná povrchová napětí, můžeme pro velikosti sil psát:

$$F_{12} = \sigma_{12}\Delta l, \quad F_{23} = \sigma_{23}\Delta l, \quad F_{13} = \sigma_{13}\Delta l. \tag{10}$$

Síly $\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{23}$ kapku stahují, zatímco síla $\vec{F}_{13}$ se snaží ji roztáhnout po hladině kapaliny. V rovnovážném stavu, kdy je kapka v klidu a má tvar čočky, platí:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{13} = \vec{0}. \tag{11}$$



OBR. 11

Tuto vektorovou rovnici rozepíšeme do dvou složek. Ve směru osy x dostáváme rovnost

$$F_{12}\cos\vartheta_{12} + F_{23}\cos\vartheta_{23} = F_{13}; \tag{12}$$

ve směru osy y rovnost

$$F_{12}\sin\vartheta_{12} = F_{23}\sin\vartheta_{23}. \tag{13}$$

Obě rovnice umocníme na druhou:

$$F_{12}^2\cos^2\vartheta_{12} + 2F_{12}F_{23}\cos\vartheta_{12}\cos\vartheta_{23} + F_{23}^2\cos^2\vartheta_{23} = F_{13}^2, \tag{14}$$

$$F_{12}^2\sin^2\vartheta_{12} = F_{23}^2\sin^2\vartheta_{23}. \tag{15}$$

Nyní rovnice sečteme. Užijeme přitom goniometrický vzorec $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ a dostaneme:

$$F_{12}^2 + 2F_{12}F_{23}\cos\vartheta_{12}\cos\vartheta_{23} + F_{23}^2\cos^2\vartheta_{23} = F_{13}^2 + F_{23}^2\sin^2\vartheta_{23}. \tag{16}$$

První člen převedeme z levé strany na pravou, a poté k oběma stranám rovnosti přičteme výraz $F_{23}^2\cos^2\vartheta_{23}$ (laskavý čtenář se vyvaruje otázek „Jak na to mám přijít?“; hned následující řádek ukazuje, jak je tato úprava účelná):

$$2F_{12}F_{23}\cos\vartheta_{12}\cos\vartheta_{23} + 2F_{23}^2\cos^2\vartheta_{23} = F_{13}^2 + F_{23}^2\sin^2\vartheta_{23} - F_{12}^2 + F_{23}^2\cos^2\vartheta_{23}. \tag{17}$$

Na levé straně vytkneme; pravou stranu upravíme dle „oblíbeného“ goniometrického vzorce:

$$2F_{23}\cos\vartheta_{23}(F_{12}\cos\vartheta_{12}+F_{23}\cos\vartheta_{23})=F_{13}^2+F_{23}^2-F_{12}^2. \tag{18}$$

Pozorná čtenářka (a snad i pozorný čtenář) si povšimla, že závorka na levé straně odpovídá levé straně vzorce (12); proto ji můžeme nahradit silou F_{13}. Z takto zjednodušené rovnosti vyjádříme úhel ϑ_{23}:

$$\cos\vartheta_{23}=\frac{F_{13}^2+F_{23}^2-F_{12}^2}{2F_{13}F_{23}}. \tag{19}$$

Užijme vztahy (10) a pišme:

$$\cos\vartheta_{23}=\frac{\sigma_{13}^2(\Delta l)^2+\sigma_{23}^2(\Delta l)^2-\sigma_{12}^2(\Delta l)^2}{2\,\sigma_{13}\Delta l\,\sigma_{23}\Delta l}. \tag{20}$$

V čitateli a jmenovateli vytkneme $(\Delta l)^2$, které se vzápětí vykrátí. Výsledkem je vztah

$$\cos\vartheta_{23}=\frac{\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2-\sigma_{12}^2}{2\sigma_{13}\sigma_{23}}, \tag{21}$$

se kterým budeme dále pracovat. Postupem zcela analogickým dokážeme obdobný vztah pro úhel ϑ_{12}:

$$\cos\vartheta_{12}=\frac{\sigma_{12}^2+\sigma_{13}^2-\sigma_{23}^2}{2\sigma_{12}\sigma_{13}}. \tag{22}$$

Vraťme se k OBR. 1. Aby se kapka udržela pohromadě, musejí být úhly ϑ_{12} a ϑ_{23} menší než $\pi/2$ (tj. 90°). Z matematiky je známo, že je-li $x\in(0,\pi/2)$, pak je $\cos x\in(0,1)$. Proto dostáváme rovnosti

$$0<\cos\vartheta_{12}<1 \quad \text{resp.} \quad 0<\cos\vartheta_{23}<1, \tag{23}$$

do nichž dosadíme úhly vyjádřené ve vztazích (22) resp. (21):

$$0<\frac{\sigma_{12}^2+\sigma_{13}^2-\sigma_{23}^2}{2\sigma_{12}\sigma_{13}}<1 \quad \text{resp.} \quad 0<\frac{\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2-\sigma_{12}^2}{2\sigma_{13}\sigma_{23}}<1. \tag{24}$$

Zlomky odstraníme vynásobením (nenulovými) jmenovateli:

$$0<\sigma_{12}^2+\sigma_{13}^2-\sigma_{23}^2<2\sigma_{12}\sigma_{13} \quad \text{resp.} \quad 0<\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2-\sigma_{12}^2<2\sigma_{13}\sigma_{23}. \tag{25}$$

Nyní obě nerovnice sečteme, na levé straně se několik členů vyruší, dále nerovnici vydělíme dvěma a nenulovým číslem σ_{13}:

$$2\sigma_{13}^2<2(\sigma_{12}\sigma_{13}+\sigma_{13}\sigma_{23}) \tag{26}$$

$$\sigma_{13}^2<\sigma_{12}\sigma_{13}+\sigma_{13}\sigma_{23} \tag{27}$$

$$\sigma_{13}<\sigma_{12}+\sigma_{23}. \tag{28}$$

Připomeňme, že uvedené rovnosti jsme tvořili s cílem najít podmínky, za kterých se kapka udrží pohromadě. Platí-li tedy podmínka (28), kapka se udrží pohromadě; platí-li její negace, kapka se „rozplizne“ po hladině. Nastávají tedy dvě možnosti:

1) Je-li $\sigma_{13} < \sigma_{12} + \sigma_{23}$, pak se **kapka udrží pohromadě** a má tvar čočky. Příklad: parafinový olej na vodě. (Napětí mezi vodou a parafinovým olejem je $\sigma_{12} = 38$ mN·m^{-1}, mezi olejem a vzduchem $\sigma_{23} = 40$ mN·m^{-1} a mezi vodou a vzduchem $\sigma_{13} = 74$ mN·m^{-1}. Uvedená nerovnost je splněna, neboť $74 < 78$.)

2) Je-li $\sigma_{13} \geq \sigma_{12} + \sigma_{23}$, pak se **kapka rozteče po povrchu** kapaliny.[1]) Příklad: olivový olej na vodě. (Napětí mezi vodou a olivovým olejem je $\sigma_{12} = 12$ mN·m^{-1}, mezi olejem a vzduchem $\sigma_{23} = 33$ mN·m^{-1} a mezi vodou a vzduchem $\sigma_{13} = 74$ mN·m^{-1}. Uvedená nerovnost je splněna, neboť $74 > 45$.)

Kapalina v nádobě

Nalejeme-li kapalinu do nádoby (viz OBR. 12), stýkají se u vnitřní stěny nádoby tři prostředí: stěna z pevné látky (1), kapalina (2) a vzduch (3).[2]) Povrchové síly resp. napětí v jednotlivých rozhraních označíme analogicky jako v předchozích výkladech $\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{13}$, $\vec{F}_{23}$ resp. σ_{12}, σ_{13}, σ_{23}. Protože $\vec{F}_{12}$ a $\vec{F}_{13}$ leží na jedné přímce, je – porovnejme s OBR. 11 – nutně úhel $\vartheta_{12} = 0$, potom ovšem je $\cos\vartheta_{12} = 1$. Toto dosadíme do vztahu (22), odstraníme zlomek a dostaneme

$$\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2 = 2\sigma_{12}\sigma_{13}. \tag{30}$$

Odstraníme zlomek také v rovnosti (21), dostaneme

$$\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 - \sigma_{12}^2 = \cos\vartheta_{23} \cdot 2\sigma_{13}\sigma_{23}. \tag{31}$$

Rovnosti (30) a (31) sečteme:

$$2\sigma_{13}^2 = 2\sigma_{12}\sigma_{13} + \cos\vartheta_{23} \cdot 2\sigma_{13}\sigma_{23}. \tag{32}$$

Tuto rovnost vydělíme nenulovým výrazem $2\sigma_{13}$ a vyjádříme úhel ϑ_{23}:

$$\cos\vartheta = \cos\vartheta_{23} = \frac{\sigma_{13} - \sigma_{12}}{\sigma_{23}}. \tag{33}$$

Protože jiný úhel než ϑ_{23} v dalších úvahách nefiguruje, značme jej od této chvíle pouze ϑ.

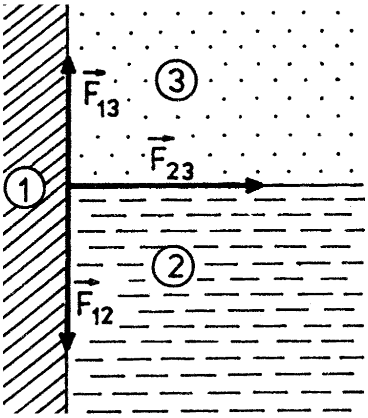
Mohou nastat tyto situace:

1) Je-li $\sigma_{13} < \sigma_{12}$, je čitatel zlomku v (33) záporný. Záporné hodnoty funkce cos přísluší úhlům z intervalu $(\pi/2, 3\pi/2)$, a z hlediska naší situace stačí uvažovat jen interval $(\pi/2, \pi)$. Proto je úhel ϑ **tupý** (OBR. 13). Částice u stěny nádoby jsou taženy směrem dolů. Kapalina **nesmáčí stěnu**, její volný povrch je **vypuklý (konvexní)**.[3]) Příklad: kombinace látek rtuť, sklo, vzduch.

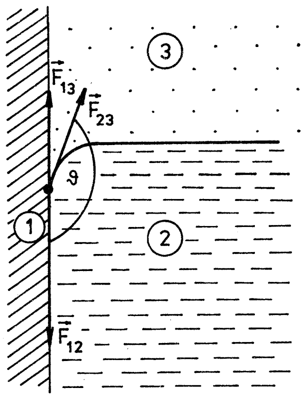
2) Je-li $\sigma_{13} > \sigma_{12}$, je čitatel zlomku v (33) kladný. Kladné hodnoty funkce cos přísluší (v našem případě) úhlům z intervalu $(0, \pi/2)$, proto je úhel ϑ **ostrý** (OBR. 14). Částice u stěny nádoby

[1]) Na dosti velkém povrchu se kapka rozteče na vrstvu, jejíž tloušťka je rovna poloměru sféry molekulového působení. Toho lze využít k „měření molekuly pravítkem“ – viz učební text *Laboratorní měření pro gymnázia.*
[2]) Místo vzduchu někdy také sytá pára kapaliny, viz další výklad.
[3]) Pojmy „konvexní“ a „konkávní“ je třeba vztahovat na povrch kapaliny, ne na funkci, která popisuje jeho hranici, srov. s pojmy o průběhu funkce jedné proměnné.

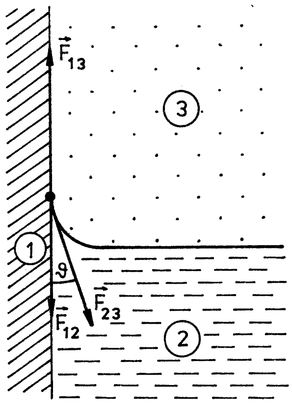
se posunou směrem vzhůru. Kapalina **smáčí stěnu**, její volný povrch je **vydutý (konkávní)**. Příklad: kombinace látek voda, sklo, vzduch.



Obr. 12



Obr. 13



Obr. 14

3) Je-li $\sigma_{13} = \sigma_{12}$, je čitatel diskutovaného zlomku roven 0. Tedy $\cos\vartheta = 0$, z toho plyne (v dané situaci) $\cos\vartheta = \pi/2$. Hladina kapaliny svírá se stěnou nádoby **pravý** úhel, povrch kapaliny je **rovinný až ke stěně**. Příklad: kombinace látek voda, stříbro, vzduch.

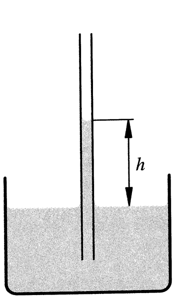
4) Je-li $\sigma_{13} - \sigma_{12} = \sigma_{23}$, je $\cos\vartheta = 1$ a úhel $\vartheta = 0$. Kapalina se **zvedne podél stěny** nahoru, rovnováha nastane, až kapalina pokryje celou stěnu tenkou vrstvou, dochází k **dokonalému smáčení**. Příklad: kombinace látek voda, velmi čisté sklo, vzduch.

KAPILÁRNÍ JEVY V ÚZKÝCH TRUBICÍCH

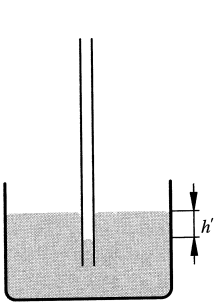
Kapilára (z lat. capillus – vlas) – úzká trubice malého vnitřního průměru. Vložíme-li kapiláru svisle do širší nádoby, pozorujeme zakřivení povrchu kapaliny v kapiláře a její vzestup nebo snížení vzhledem ke hladině kapaliny v nádobě.

Kapilární elevace – vzniká u kapalin **smáčejících** stěny nádoby. Vytvoří se dutý vrchlík, který je výše než hladina okolní kapaliny (obr. 15).

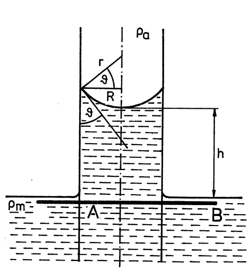
Kapilární deprese – vzniká u kapalin **nesmáčejících** stěny nádoby. Vytvoří se vypuklý vrchlík, který je níže než hladina okolní kapaliny (obr. 16).



Obr. 15



Obr. 16



Obr. 17

Stanovme **elevační výšku** h (obr. 17). Využijeme přitom **základní rovnici hydrostatiky**, která říká, že v kapalině, která je v tíhovém poli v rovnovážném stavu, je v každém místě vodorovné roviny vedené kapalinou stejný tlak. Taková rovina je silnou čarou vyznačena v OBR. 17. Uvažujme o tlacích v bodech A (pod kapilárou) a B (jinde).

Tlak v bodě B:

- nad povrchem kapaliny je vzduch → atmosferický tlak p_a
- bod B pod povrchem → kohezní tlak p_{koh}

Tlak v bodě A:

- nad povrchem kapaliny je vzduch → atmosferický tlak p_a; sloupec vzduchu je v porovnání s bodem B nižší o délku h, jež je vyplněna kapalinou, proto je nutno odečíst tlak $h\varrho_0 g$, kde ϱ_0 je hustota vzduchu
- bod B pod povrchem → kohezní tlak p_{koh}; povrch je dutě zakřiven, proto je nutno odečíst kapilární tlak $p_k = 2\sigma/r$
- sloupec vody o výšce h → hydrostatický tlak $h\varrho g$, kde ϱ je hustota kapaliny

Z uvedené analýzy dostáváme rovnici:

$$p_a + p_{koh} = p_a - h\varrho_0 g + p_{koh} - \frac{2\sigma}{r} + h\varrho g, \tag{1}$$

kterou snadno upravíme na tvar

$$\frac{2\sigma}{r} = h\varrho g - h\varrho_0 g, \tag{2}$$

z něhož dostáváme

$$h = \frac{2\sigma}{r(\varrho - \varrho_0)g}. \tag{3}$$

Je-li R vnitřní průměr trubice a ϑ krajní úhel, je podle OBR. 17 poloměr zakřiveného povrchu r dán vztahem $r = R/\cos\vartheta$. Hustota vzduchu ϱ_0 je v porovnání s hustotou kapaliny ϱ malá; proto ji lze zanedbat. Z rovnosti (3) tak plyne

$$h = \frac{2\sigma\cos\vartheta}{R\varrho g}. \tag{4}$$

Smáčí-li kapalina dokonale stěny nádoby, je $\vartheta = 0$ a $\cos\vartheta = 1$. Vzorec (4) se ještě zjednoduší na tvar

$$h = \frac{2\sigma}{R\varrho g}. \tag{5}$$

Vzorec (5) jsme odvodili[4]) pro kapilární elevaci. Vztah pro kapilární depresi je zcela identický.

Důsledky a aplikace

- Vystupování vody z hloubky do povrchových vrstev půdy → vypařování. Stlačováním (válcováním) se kapiláry vytvářejí → vzlínání vody.
- Nasávání kapaliny do knotů. Vzlínání pájky v tenkých spárách.
- Vzlínání vody do stěn domů. Stoupání vody z kořenů rostlin až do vrcholků.
- Zjišťování drobných vad materiálů: Indikační kapalina se nanese na materiál a poté otře, zůstala pouze v trhlinách. Po otření se nanese detekční látka. Ta nasává indikační látku z vad → vytvoří se barevná stopa.

[4]) K výslednému vzorci lze dojít úvahou: Ve výšce h, do níž kapalina vystoupí, je hydrostatický tlak roven tlaku kapilárnímu, tedy $h\varrho g = \frac{2\sigma}{R}$. Snadnou úpravou dostaneme vzorec (5).