

Vlastnosti posloupností

Základní definice a věty

Monotonie posloupností

Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **rostoucí**, jestliže pro $\forall r, s \in \mathbf{N}$ platí: $r < s \Rightarrow a_r < a_s$.

Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **klesající**, jestliže pro $\forall r, s \in \mathbf{N}$ platí: $r < s \Rightarrow a_r > a_s$.

Kritéria pro rostoucí resp. klesající posloupnost:

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí, právě když pro $\forall n \in \mathbf{N}$ je $a_n < a_{n+1}$.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající, právě když pro $\forall n \in \mathbf{N}$ je $a_n > a_{n+1}$.

Pojmy rostoucí resp. klesající posloupnost lze ještě zobecnit; definujeme pojmy neklesající resp. nerostoucí posloupnost:

Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **neklesající**, jestliže pro $\forall r, s \in \mathbf{N}$ platí: $r < s \Rightarrow a_r \leq a_s$.

Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **nerostoucí**, jestliže pro $\forall r, s \in \mathbf{N}$ platí: $r < s \Rightarrow a_r \geq a_s$.

Podobně jako v předchozích případech lze vyslovit i nyní příslušná kritéria:

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající, právě když pro $\forall n \in \mathbf{N}$ je $a_n \leq a_{n+1}$.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí, právě když pro $\forall n \in \mathbf{N}$ je $a_n \geq a_{n+1}$.

Porovnáním výše uvedených definic dostáváme jednoduchá tvrzení:

Každá rostoucí posloupnost je neklesající.

Každá klesající posloupnost je nerostoucí.

Posloupnosti, které jsou nerostoucí nebo neklesající, se nazývají **monotónní**.

Omezenost posloupností

Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **shora omezená**, jestliže $\exists h \in \mathbf{R}$ takové, že pro $\forall n \in \mathbf{N}$ je $a_n \leq h$.

Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **zdola omezená**, jestliže $\exists d \in \mathbf{R}$ takové, že pro $\forall n \in \mathbf{N}$ je $a_n \geq d$.

Jestliže je posloupnost omezená zdola a zároveň shora, říkáme, že je **omezená**.