# MOCNINNÉ FUNKCE

*Učební text pro druhý ročník (sextu) gymnázia*

## MOCNINA S PŘIROZENÝM EXPONENTEM, „PŘIROZENÁ MOCNINA“

Připomeňme nejprve definici **mocniny s přirozeným exponentem**. Jak víme, pro každé $x \in \mathbf{R}$ a pro každé $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, definujeme

$$x^n := \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n-\text{krát}}. \tag{1}$$

Číslo $x$ se nazývá **základ mocniny** neboli **mocněnec**, číslo $n$ **exponent** neboli **mocnitel**.

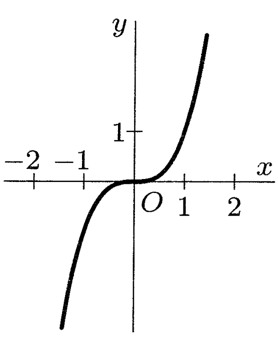
Definici (1) lze zapsat „sofistikovaněji“ pomocí indukce:[1])

$$x^1 := x; \quad x^{n+1} := x \cdot x^n \text{ pro každé } n \in \mathbf{N},\ n \geq 1. \tag{2}$$

**Mocninná funkce s přirozeným exponentem** je funkce s definičním oborem $\mathbf{R}$ daná předpisem

$$f(x) := x^n, n \in \mathbf{N},\ n \geq 1. \tag{3}$$

Je-li $n = 1$, dostáváme zvláštní případ mocninné funkce: **funkci lineární**. Pro $n = 2$ obdržíme **funkci kvadratickou**. Tyto funkce z našich úvah *nevylučujeme* a směle je *řadíme* mezi mocninné funkce. Protože jsme je podrobněji studovali dříve, nebudeme se jimi nyní (příliš) zabývat.




Obr. 1

$n$ **liché**

$\mathrm{D}(f) = \mathbf{R}$

$\mathrm{H}(f) = \mathbf{R}$

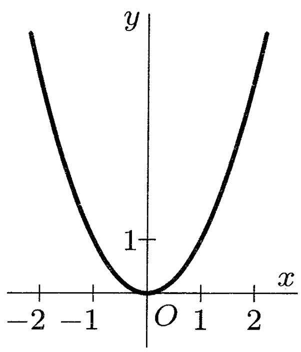
Rostoucí v $\mathrm{D}(f)$.

Lichá.

Není shora omezená, ani zdola omezená.

Nemá ani min, ani max.

Je prostá v $\mathrm{D}(f)$.




Obr. 2

$n$ **sudé**

$\mathrm{D}(f) = \mathbf{R}$

$\mathrm{H}(f) = \langle 0, +\infty)$

Klesající v $(-\infty, 0\rangle$, rostoucí v $\langle 0, +\infty)$.

Sudá.

Není shora omezená, je zdola omezená.

V bodě 0 má min, nemá max.

Není prostá v $\mathrm{D}(f)$.

[1]) Princip indukce jsme již využili jako „podklad“ důkazu matematickou indukcí; zde ovšem nic *nedokazujeme*, nýbrž „pouze“ *definujeme* nový pojem.

## MOCNINA SE ZÁPORNÝM CELÝM EXPONENTEM

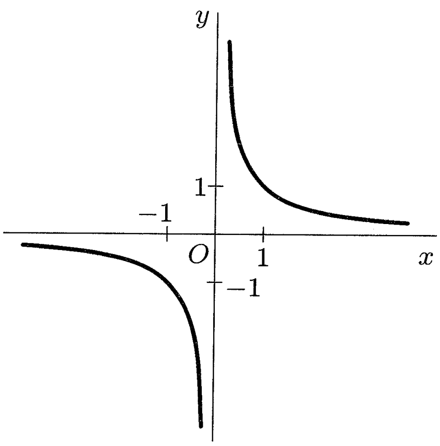
Definici mocninné funkce (v předchozím textu pro přirozený exponent) chceme rozšířit i na exponent záporný. Aby zůstala v platnosti známá pravidla o počítání s mocninami, lze to učinit touto definicí:

$$x^{-n} := \frac{1}{x^n} \text{ pro } \forall n \in \mathbf{N}, n \geq 1. \tag{4}$$

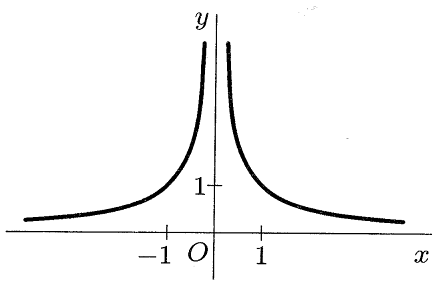
**Mocninná funkce se záporným celým exponentem** má definiční obor $\mathbf{R} - \{0\}$; je dána předpisem

$$f(x) := x^m, m \in \mathbf{Z}, m < 0. \tag{5}$$

Jak je zřejmé, každé číslo $x^m$, $m \in \mathbf{Z}$, $m < 0$ lze napsat jako číslo $x^{-n}$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 0$ a vypočítat dle definice (4).




Obr. 3




Obr. 4

$n$ **liché**
D$(f) = \mathbf{R} - \{0\}$
H$(f) = \mathbf{R} - \{0\}$
Klesající v $(-\infty, 0)$ a v $(0, +\infty)$.
Lichá.
Není shora omezená, ani zdola omezená.
Nemá v žádném bodě ani minimum, ani maximum.
Je prostá v D$(f)$.

$n$ **sudé**
D$(f) = \mathbf{R} - \{0\}$
H$(f) = \mathbf{R}_+$
Rostoucí v $(-\infty, 0)$, klesající v $(0, +\infty)$.
Sudá.
Není shora omezená, je zdola omezená.
Nemá v žádném bodě ani minimum, ani maximum.
Není prostá v D$(f)$.

## MOCNINA S CELÝM EXPONENTEM

Protože jsme již definovali mocninu s přirozeným exponentem a mocninu s celým záporným exponentem, nezbývá než definovat **mocninu s exponentem** 0:

$$x^0 := 1 \text{ pro } \forall x \in \mathbf{R} - \{0\}. \tag{6}$$

Připomeňme, že v našich úvahách výraz $0^0$ *nemá smysl.*

Shrneme-li definice (3), (5) a (6), je patrné, že jsme definovali **mocninnou funkci s celým exponentem**.

# ODMOCNINY

Vraťme se k přirozeným mocninám. Pohled na graf funkce $x^3$, $x^5$, $\ldots$ – tedy na funkce $x^n$, kde $n$ je liché přirozené číslo – vzbuzuje *dojem*, že tyto funkce jsou prosté na $\mathrm{D}(f)$. Pohled na graf funkcí $x^2$, $x^4$, $\ldots$ – tedy na funkce $x^n$, kde $n$ je sudé přirozené číslo – vzbuzuje *dojem*, že tyto funkce na celém $\mathrm{D}(f)$ prosté nejsou; prosté jsou však jejich restrikce na interval $\langle 0, +\infty)$. Matematik se nemůže spojit s *dojmem* či *pohledem*; vyžaduje se *korektní* důkaz. Důkaz takovýchto tvrzení je však obtížný (integrální počet je nutný). Proto se tentokrát spokojme s představou získanou z grafu a uzavřeme:

Pro každé liché $n \in \mathbf{N}$ je $x^n$ prosté zobrazení množiny $\mathbf{R}$ na množinu $\mathbf{R}$. Pro každé sudé $n \in \mathbf{N}$ je restrikce $x^n|\langle 0, +\infty)$ prosté zobrazení $\langle 0, +\infty)$ na $\langle 0, +\infty)$.[2])

Protože jsou mocninné funkce (na uvedených intervalech) prosté, existují k nim funkce inverzní. Tyto funkce se nazývají **funkce odmocnina**. Definujme je:

$$x^{\frac{1}{n}} := \begin{cases} (x^n)_{-1} & \text{je-li } n \in \mathbf{N} \text{ liché,} \\ \big(x^n|\langle 0, +\infty)\big)_{-1} & \text{je-li } n \in \mathbf{N} \text{ sudé.} \end{cases} \tag{7}$$

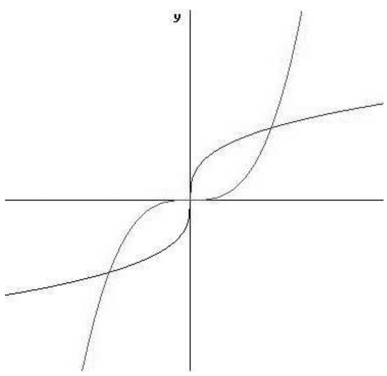
Místo symbolu $x^{\frac{1}{n}}$ užívá také symbol $\sqrt[n]{x}$; pro $n = 2$ se zápis zkracuje na $\sqrt{x}$. Z definice je patrné, že

$$\mathrm{D}(x^{\frac{1}{n}}) = \mathrm{H}(x^{\frac{1}{n}}) = \mathbf{R} \text{ pro každé liché } n \in \mathbf{N}, \tag{8.1}$$

$$\mathrm{D}(x^{\frac{1}{n}}) = \mathrm{H}(x^{\frac{1}{n}}) = \langle 0, +\infty) \text{ pro každé sudé } n \in \mathbf{N}. \tag{8.2}$$

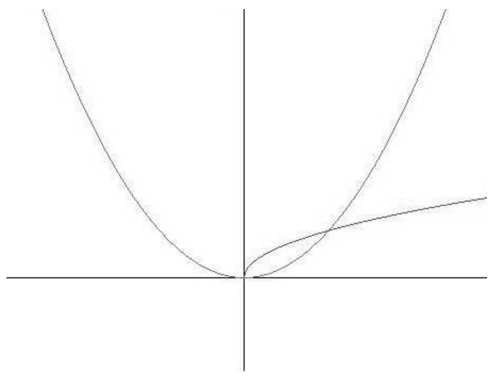
Je zřejmé, že odmocniny jsou definovány „obvyklým způsobem“ známým z elementární matematiky: Pro každé liché $n \in \mathbf{N}$ a každé $x \in \mathbf{R}$ je $\sqrt[n]{x}$ ono číslo $a \in \mathbf{R}$, pro něž je $a^n = x$. Pro každé sudé $n \in \mathbf{N}$ a každé *nezáporné* $x \in \langle 0, +\infty)$ je $\sqrt[n]{x}$ ono *nezáporné* číslo $a \in \langle 0, +\infty)$, pro něž je $a^n = x$.

Grafy funkcí odmocnina jsou osově souměrné s grafem příslušné mocniny resp. její prosté restrikce popsané výše podle osy 1. a 3. kvadrantu; jde o funkce inverzní.




Obr. 5

$n$ **liché**
$\mathrm{D}(f) = \mathbf{R}$
$\mathrm{H}(f) = \mathbf{R}$
Rostoucí v $\mathrm{D}(f)$.



Obr. 6

$n$ **sudé**
$\mathrm{D}(f) = \langle 0, +\infty)$
$\mathrm{H}(f) = \langle 0, +\infty)$
Rostoucí v $\mathrm{D}(f)$.

---

[2]) Restrikcí zobrazení (funkce) na množině $A$ rozumíme její *zúžení* na množinu $B$, kde $B \subset A$.

Lichá.
Není shora omezená, ani zdola omezená.
Nemá v žádném bodě ani minimum,
ani maximum.
Je prostá v $\mathrm{D}(f)$.

Ani sudá, ani lichá.
Není shora omezená, je zdola omezená.
Nemá v žádném bodě maximum,
minimum má v bodě 0.
Je prostá v $\mathrm{D}(f)$.

## MOCNINA S RACIONÁLNÍM EXPONENTEM

Je-li $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$, *definujeme* **mocniny s racionálními exponenty** takto:

$$x^{\frac{p}{q}} := (x^p)^{\frac{1}{q}} \tag{9}$$

v *definičním oboru pravé strany.*

Lze užít i symbol $\sqrt[q]{x^p}$. V definici je pro stručnost uvedena formulace „v definičním oboru pravé strany“. Zkusme ji rozšifrovat. Do definičního oboru funkce $\sqrt[q]{x^p}$ patří:

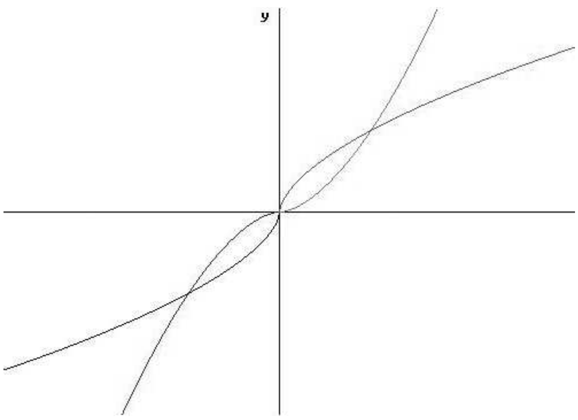
$$\mathbf{R}_+ \text{ vždy,} \tag{10}$$

$$0 \text{ právě tehdy, když je } p > 0, \tag{11}$$

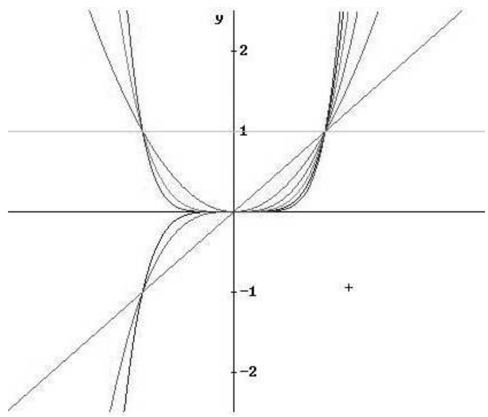
$$\mathbf{R} \text{ právě tehdy, když je } p < 0 \text{ a buď je } q \text{ liché, nebo když jsou obě čísla } p, q \text{ sudá.} \tag{12}$$

Vlastnosti mocnin s racionálním exponentem (monotonie, omezenost) vyšetříme na konkrétních případech funkcí.

V OBR. 7 jsou grafy funkcí $x^{\frac{5}{3}}$ a $x^{\frac{3}{5}}$.




OBR. 7




OBR. 8

## SHRNUTÍ

V OBR. 8 jsou vyznačeny grafy funkcí $x^n$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots, 6$.

V tomto textu jsou uvedeny defice a vlastnosti mocninných funkcí. Tyto vlastnosti jsou v hodině „objevovány“ studenty; tento text slouží jen jako shrnutí objeveného.