Gymnázium F. X. Šaldy

PŘEDMĚTOVÁ KOMISE MATEMATIKY

ELEMENTÁRNÍ GONIOMETRICKÉ A TRIGONOMETRICKÉ VĚTY

**Učební text pro druhý ročník a sextu gymnázia
a pro matematický seminář
v těchto třídách**

Honsoft • Liberec 2008 • Verze 2.0

ÚVODNÍ POZNÁMKA

V první části tohoto učebního textu jsou uvedeny a dokázány tzv. goniometrické vzorce; ve druhé části pak tzv. trigonometrické vzorce. Všechny vzorce jsou vysloveny ve formě (vhodně řazených) matematických vět; tyto věty jsou postupně (s využitím dříve dokázaných vět) dokazovány. Připomeňme, že věty mají *předpoklad* a tvrzení; na předpoklady se často zapomíná.

Nehodláme před čtenářem tajit skutečnost, že problematika korektní definice goniometrických funkcí je příliš složitá na to, aby mohla být „přetavena“ do výkladu na středoškolské úrovni. Proto – tradičně – vycházíme z „definice“ goniometrických funkcí pomocí jednotkové kružnice (touto definicí se ovšem učební text nezabývá). Výklad je podobný výkladu v učebnici *Goniometrie* z nakladatelství Prometheus; byly doplněny chybějící nebo neúplné důkazy, přidána je část o vzorcích pro funkci tg.

Součástí textu nejsou nezbytné obrázky. Příčiny této skutečnosti nejsou jen technické; obrázky si měl čtenář vytvořit ve vyučovací hodině, kde byly všechny důkazy ve spolupráci se studenty „zkonstruovány“ – tento text je tak určen spíše k opakování. Pouze pomalá, soustředěná četba doprovázená kreslením obrázků, důkladným promýšlením přečteného a vlastními výpočty může přinést plody.

Goniometrické a trigonometrické věty jsou velmi vhodným tématem k nácviku matematického myšlení; je zde dobře vidět, jakými pravidly se deduktivní výstavba matematiky řídí. Čtenář si navykne rozdělit složitější důkaz na několik částí; v následujících částech se nové problémy převádějí na problémy dřívější, již vyřešené. Proto je studium tématu užitečné i jako příprava k vysokoškolskému studiu matematiky; přitom máme na mysli zejména skutečné *studium matematiky*, nikoliv *bezduchý kalkulus* pěstovaný v některých školách.

Jde o druhou, stále ještě pracovní verzi textu; editor uvítá jakékoliv upozornění na chyby.

Sbírka byla vysázena typografickým systémem $\mathcal{AMS}$-TEX.

-jvk-

Použité značení

Česká matematická literatura tradičně značí goniometrické funkce tg a cotg; není důvod toto označení (ani pod vlivem technických norem „uváděných do souladu“ s normami EU) měnit.

Rozdíl množin A, B značíme symbolem $A - B$.

GONIOMETRICKÉ VĚTY

Věta 1. *Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí:*

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1. \tag{1}$$

D ů k a z. Rozdělme důkaz do tří kroků.

1) Předpokládejme, že $x \in (0, 2\pi) - \{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi\}$. Vyznačme v jednotkové kružnici bod $J\,[1,0]$ a orientovaný úhel $\widehat{JOL}$ o základní velikosti x. Pro souřadnice bodu L potom platí $L\,[\cos x, \sin x]$. Nechť K je pravoúhlý průmět bodu L do osy x, tedy $K\,[\cos x, 0]$. Trojúhelník OLK je vždy pravoúhlý, platí

$$|OK|^2 + |LK|^2 = |OL|^2\,, \tag{2}$$

po dosazení délek stran dostaneme rovnost (1).

2) Předpokládejme, že $x \in \{0, \pi\}$ resp. $x \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\}$. Potom je $\sin x = 0$ a $\cos x = \pm 1$ resp. $\cos x = 0$ a $\sin x = \pm 1$, v každém případě však rovnost (1) pro všechny tyto hodnoty platí.
3) Pro všechna $x \in \mathbf{R}$ lze úvahy 1) resp. 2) díky periodičnosti funkcí sin a cos snadno zobecnit.

Věta 2. *Pro každé $x \in \mathbf{R} - \cup_{k \in \mathbf{Z}}\{k \cdot \frac{\pi}{2}\}$ platí:*

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1. \tag{4}$$

D ů k a z. Rovnost vyjádříme ve tvaru $\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1$. Zřejmě platí všude tam, kde mají lomené výrazy smysl, tedy v $\mathbf{R}$ bez (všech) násobků $\pi/2$.

Věta 3 (součtové vzorce). *Pro každé $x, y \in \mathbf{R}$ platí:*

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \tag{5}$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \tag{6}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \tag{7}$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \tag{8}$$

D ů k a z. Začneme posledním vzorcem (8).

1) Předpokládejme nejprve, že x, y jsou čísla z intervalu $\langle 0, 2\pi)$ a přitom $x > y$. V soustavě souřadnic s počátkem O sestrojíme orientovaný úhel $\widehat{JOA}$ o velikosti x a úhel $\widehat{JOB}$ o velikosti y; přitom $J\,[1,0]$, $A\,[\cos x, \sin x]$, $B\,[\cos y, \sin y]$. Bodem A vedeme rovnoběžku s osou y, bodem B vedeme rovnoběžku s osou x; průsečík rovnoběžek označíme D. Trojúhelník ABD je pravoúhlý. Z Pythagorovy věty plyne: $|AB|^2 = |BD|^2 + |AD|^2$, po dosazení délek úseček vypočtených ze souřadnic bodů dostaneme

$$|AB|^2 = |\cos y - \cos x|^2 + |\sin x - \sin y|^2, \tag{9}$$

$$|AB|^2 = (\cos y - \cos x)^2 + (\sin x - \sin y)^2, \tag{10}$$

upravíme podle algebraického vzorce, sečteme, užijeme vzorec (1), vytkneme číslo 2, dostaneme

$$|AB|^2 = 2(1 - \cos x \cos y - \sin x \sin y). \tag{11}$$

Otočíme-li soustavu souřadnic Oxy o úhel $\widehat{JOB}$ (polopřímka OJ se přitom otočí v kladném smyslu o úhel velikosti y), přejde osa x do polohy $x' = OB$ a osa y do polohy y', přičemž y' je kolmé na x'. Dále budeme pracovat v soustavě souřadnic $Ox'y'$. Pro souřadnice bodů zde platí: $B\,[1, 0]$, $A\,[\cos(x - y), \sin(x - y)]$. Bodem A vedeme rovnoběžku s osou y'; její průsečík s osou x' je bod E. Pravoúhlý trojúhelník AEB má strany délek $|BE| = |1 - \cos(x - y)|$, $|AE| = |\sin(x - y)|$ a platí v něm Pythagorova věta:

$$|AB|^2 = |1 - \cos(x - y)|^2 + |\sin(x - y)|^2, \tag{12}$$

$$|AB|^2 = [1 - \cos(x - y)]^2 + [\sin(x - y)]^2. \tag{13}$$

Umocníme dle algebraického vzorce, zjednodušíme, užijeme vzorec (1), vytkneme číslo 2; dostaneme

$$|AB|^2 = 2 \cdot [1 - \cos(x - y)]. \tag{14}$$

Levé strany vztahů (11) a (14) se rovnají, musejí se tedy rovnat i strany pravé. Proto

$$2(1 - \cos x \cos y - \sin x \sin y) = 2 \cdot [1 - \cos(x - y)]. \tag{15}$$

Rovnost vydělíme dvěma, poté odečteme od obou stran číslo 1, dostaneme rovnost $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$, což je dokazované tvrzení (8). Avšak pozor! Vztah je zatím dokázán *pouze* pro $x, y \in \langle 0, 2\pi)$ taková, že $x > y$.

2) Nyní předpokládejme, že x, y leží v $\langle 0, 2\pi)$ a přitom $x = y$. Dosadíme do dokazovaného vztahu (8) a dostaneme $\cos 0 = \cos^2 x + \sin^2 x$. Protože $\cos 0 = 1$, je tento vztah (pravdivým) důsledkem V.1, která již byla dokázána.

3) Dále předpokládejme, že x, y leží v $\langle 0, 2\pi)$ a přitom $x < y$. Potom lze psát

$$\cos(x - y) = \cos[-(y - x)] = \cos(y - x) = \cos y \cos x + \sin y \sin x; \tag{16}$$

využili jsme toho, že funkce cos je sudá, a přepsali výraz na levé straně tak, aby menšenec v argumentu byl větší než menšitel – tak jsme problém převedli na případ 1), který již byl dokázán.

4) Platnost vztahu nutno rozšířit na libovolná čísla $x, y \in \mathbf{R}$. Funkce sinus a kosinus jsou periodické s periodou 2π. Pro všechna $x, y \in \mathbf{R}$ existují $x_0, y_0 \in \langle 0, 2\pi)$ a $k, m \in \mathbf{Z}$ taková, že $x = x_0 + 2k\pi$, $y = y_0 + 2m\pi$. Tato vyjádření x a y dosadíme nejprve do levé strany vzorce 8:

$$\cos(x - y) = \cos[(x_0 + 2k\pi) - (y_0 + 2m\pi)] = \cos[(x_0 - y_0) + 2(k - m)\pi] = \cos(x_0 - y_0), \tag{17}$$

poté i do strany pravé:

$$\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x_0 + 2k\pi) \cdot \cos(y_0 + 2m\pi) + \sin(x_0 + 2k\pi) \cdot \sin(y_0 + 2m\pi) = \\ = \cos x_0 \cos y_0 + \sin x_0 \sin y_0. \tag{18}$$

Obě strany se rovnají. Tím jsme vzorec (8) dokázali pro všechna $x \in \mathbf{R}$. Nyní je třeba dokázat vzorce (5)–(7).

K tomu nejprve dokážeme dvě lemmata:[1])

Lemma 1. *Pro každé* $x \in \mathbf{R}$ *je* $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$.

D ů k a z. Podle již dokázané rovnosti (8) dokazujeme přímo; platí:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos x + \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin x = 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x = \sin x. \tag{19}$$

Lemma 2. *Pro každé* $x \in \mathbf{R}$ *je* $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

D ů k a z. S využitím již dokázaného L.1 dokazujeme přímo:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \cos x. \tag{20}$$

Nyní se vraťme k důkazu rovnosti (5) ve V.3. Využijeme přitom L.1 a L.2; budeme postupovat přímým důkazem:

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \cos[\frac{\pi}{2} - (x+y)] = \cos[(\frac{\pi}{2} - x) - y] = \\ &= \cos(\frac{\pi}{2} - x) \cdot \cos y + \sin(\frac{\pi}{2} - x) \cdot \sin y = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y. \end{aligned} \tag{21}$$

K důkazu rovnosti (6) využijeme již dokázaný vzorec (5) a dále toho, že funkce sinus je lichá a funkce kosinus sudá:

$$\sin(x-y) = \sin(x + (-y)) = \sin x \cdot \cos(-y) + \cos x \cdot \sin(-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y. \tag{22}$$

Důkaz rovnosti (7) provedeme jej obdobně jako důkaz rovnosti (6), využijeme identitu (8):

$$\cos(x+y) = \cos(x - (-y)) = \cos x \cos(-y) + \sin x \cdot \sin(-y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y. \tag{23}$$

Věta 4 (vzorce pro dvojnásobný argument). *Pro každé* $x \in \mathbf{R}$ *platí:*

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \tag{24}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x. \tag{25}$$

D ů k a z. Využijeme V.3 a identitu $2x = x + x$ známou i absolventům zvláštních škol. Je tedy podle (5) $\sin 2x = \sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x$, dále je podle (7) $\cos 2x = \cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x$. $\square$

[1]) Názvem *lemma* se označuje pomocná věta (využitá zpravidla pouze k důkazu jiné, důležitější věty). Jde o substantivum středního rodu, skloňuje se podobně jako slovo *dogma*.

Věta 5 (vzorce pro poloviční argument). *Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí:*

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}, \tag{26}$$

$$\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}. \tag{27}$$

Důkaz. Začněme rovností (26). Vyjdeme ze vzorce (25), který upravíme užitím vztahu (1). Platí $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1-\sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$. Vyjádříme $\sin^2 x$:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \;\Rightarrow\; |\sin x| = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}. \tag{28}$$

Napíšeme-li ve (28) místo x všude $\frac{x}{2}$ (místo $2x$ tedy píšeme x), získáme vzorec (26). nyní druhou část věty, rovnost (27). Postup je obdobný: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$. Odtud vyjádříme

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \;\Rightarrow\; |\cos x| = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}. \tag{29}$$

Nakonec nahradíme x výrazem $2x$ a dostaneme kýženou rovnost (27). $\square$

Poznámka 1. Demonstrujme na dokázaných větách metodu, jakou je matematika budována. V.5 (vzorce pro poloviční argument) jsme dokázali pomocí V.4 (vzorce pro dvojnásobný argument). Důkaz V.4 byl postaven na součtových vzorcích, tedy V.3. Tato věta byla dokázána mj. pomocí věty Pythagorovy, jejíž důkaz je postaven na větách Euklidových. Euklidovy věty byly (v prvním ročníku) dokázány pomocí podobnosti; věty o podobných útvarech vycházejí již z (Hilbertových) axiomů euklidovské geometrie. $\square$

Věta 6 (převod součtu na součin). *Pro všechna $x, y \in \mathbf{R}$ platí*

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} \tag{31}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2} \tag{32}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} \tag{33}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2} \tag{34}$$

Důkaz. Využijeme sice „kostrbaté“, ale pravdivé rovnosti

$$\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = x, \tag{35}$$

$$\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = y. \tag{36}$$

Dokažme (přímo) vzorec (31); užijeme (35), (36) a V.3:

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y = \sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) + \sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) &= \\ = \left[\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}\right] &+ \\ + \left[\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}\right] &= \\ = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}. \qquad (37)\end{aligned}$$

Ostatní vzorce se dokazují analogicky. □

Věta 7 (součtové vzorce pro tg). *Platí*

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}, \qquad (38)$$

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}. \qquad (39)$$

pro všechna $x, y \in \mathbf{R}$ taková, že pro ně mají obě strany rovností smysl.

Důkaz. Přepíšeme funkci tg podle definice, užijeme V.3:

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x\cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}. \qquad (40)$$

Zlomek na pravé straně vykrátíme výrazem $\cos x \cos y$ (předpokládáme přitom, že $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$), dostaneme dokazovaný vztah (38).

Vztah (39) dokazujeme analogicky, dělíme týmž výrazem:

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)} = \frac{\sin x\cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y + \sin x \sin y} = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}. \qquad (41)$$

Poznámka 2. Předpoklady V.7 se obvykle uvádějí ve stručné podobě. Rozeberme je podrobněji. Kdy má např. výraz (38) smysl? Zřejmě

$$x, y, (x+y) \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \text{ a } \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \neq 1. \qquad (42)$$

Věta 8 (tg dvojnásobného argumentu). *Pro každé $x \in \mathbf{R} - \cup_{k\in\mathbf{Z}}\{k \cdot \frac{\pi}{4}\}$ platí:*

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}. \qquad (43)$$

Důkaz. Funkci tg přepíšeme podle definice, dále užijeme V.4, upravený výraz ještě vykrátíme výrazem $\cos^2 x$, který je – vzhledem k předpokladu – různý od nuly:

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}. \qquad (44)$$

Věta 9 (tg polovičního argumentu). *Pro každé* $x \in \mathbf{R} - \cup_{k\in\mathbf{Z}}\{k\cdot\pi\}$ *platí:*

$$\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}. \tag{45}$$

Důkaz. Funkci tg přepíšeme podle definice, upravíme podle věty o absolutní hodnotě podílu, poté dosadíme dle V.5:

$$\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| = \left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right| = \frac{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}{\left|\cos\frac{x}{2}\right|} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}. \tag{46}$$

TRIGONOMETRICKÉ VĚTY

Věta 10 (sinová věta). *V každém trojúhelníku* ABC *(při obvyklém značení) platí*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \tag{47}$$

Důkaz. Z uvedených dvou rovností dokážeme nejprve rovnost první. Veďme bodem C kolmici na stranu AB, její patu označme P. Vzhledem k velikosti úhlu α mohou nastat tři případy:

1) $\alpha < 90°$. V pravoúhlém trojúhelníku APC platí $|CP| = b\sin\alpha$; v pravoúhlém trojúhelníku BPC platí $|CP| = a\sin\beta$. Porovnáním obou vyjádření $|CP|$ dostáváme rovnost $b\sin\alpha = \alpha\sin\beta$, od které přejdeme k rovnosti (47) prostým dělením.

2) $\alpha = 90°$. V tomto případě jsou body A a P totožné. Je tedy $|CP| = b$. Chceme dokázat, že i v této situaci platí sinová věta; protože $a = \pi/2$ a protože $\sin(\pi/2) = 1$, můžeme psát dále:

$$|CP| = b = b\cdot 1 = b\sin\frac{\pi}{2} = b\sin\alpha; \tag{48}$$

zbytek důkazu je stejný jako v předchozím případu.

3) $\alpha > 90°$. V pravoúhlém trojúhelníku APC platí $|CP| = b\sin(\pi-\alpha)$; v pravoúhlém trojúhelníku ABC platí $|CP| = a\sin\beta$. Užitím vzorce (6) první vyjádření upravíme:

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\pi\cos\alpha - \cos\pi\sin\alpha = \sin\alpha; \tag{49}$$

dále je důkaz stejný jako v případě 1). □

Tím je první část rovnosti (47) pro všechny možné případy dokázána. Druhá část plyne z této první cyklickou záměnou.

Poznámka 3. Čtenář si možná položil otázku, zda rovnost (47) není třeba doplnit nějakou podmínkou, vždyť ve jmenovateli každého zlomku je funkce sin, která může obecně nabývat nulových hodnot. V našem případě jsou ovšem α, β, γ vnitřní úhly trojúhelníku – náleží tedy intervalu $(0, \pi/2)$ – a v tomto intervalu nabývá funkce sin *pouze* nenulových hodnot.

Věta 11 (kosinová věta). *V každém trojúhelníku ABC (při obvyklém značení) platí*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \tag{52}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \tag{53}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \tag{54}$$

Důkaz. Dokažme rovnost (52). Veďme bodem C kolmici na stranu AB, její patu označme P. Vzhledem k velikosti úhlu α mohou nastat tři případy:

1) $\alpha < 90°$. V pravoúhlém trojúhelníku BPC platí dle Pythagorovy věty

$$a^2 = |CP|^2 + |BP|^2. \tag{55}$$

V trojúhelníku APC je $|AP| = b\cos\alpha$, $|CP| = b\sin\alpha$. Dále platí rovnost $|BP| = |AB| - |AP|$, z ní po dosazení dostáváme $|BP| = c - b\cos\alpha$. Tyto výrazy dosadíme do vztahu (55):

$$a^2 = (b\sin\alpha)^2 + (c - b\cos\alpha)^2 = b^2\sin^2\alpha + c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha. \tag{56}$$

Z prvního a posledního členu vytkneme b^2 a upravíme dle V.1:

$$a^2 = b^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \tag{57}$$

2) $\alpha = 90°$. Podle Pythagorovy věty je $a^2 = b^2 + c^2$. Protože dle předpokladu je $\alpha = 90°$, je $\cos\alpha = 0$, takže rovnost plynoucí z Pythagorovy věty je ekvivalentní s rovností (52).

3) $\alpha > 90°$. V pravoúhlém trojúhelníku BPC platí dle Pythagorovy věty rovnost (55). V trojúhelníku APC je $|AP| = b\cos(180° - \alpha)$, $|CP| = b\sin(180° - \alpha)$. Dále zřejmě platí rovnost $|BP| = |AB| + |AP|$. Protože dle V.3 je $\cos(180° - \alpha) = \cos 180°\cos\alpha + \sin 180°\sin\alpha = -\cos\alpha$ a $\sin(180° - \alpha) = \sin 180°\cos\alpha - \cos 180°\sin\alpha = \sin\alpha$, platí $|AP| = -b\cos\alpha$, $|CP| = b\sin\alpha$. Dosaďme všechny uvedené výrazy do (55). Dostaneme $a^2 = (b\sin\alpha)^2 + (c - b\cos\alpha)^2$, což je výraz (56). Proto je dále důkaz shodný s důkazem pro případ 1).

Tím je rovnost (52) pro všechny možné případy dokázána. Rovnosti (53)–(54) se dokáží zcela analogicky, stačí provést cyklickou záměnu. □

V dalších úvahách budeme symbolem r značit poloměr kružnice opsané; střed této kružnice – jak je čtenáři jistě známo – leží v průsečíku os stran trojúhelníku.

Věta 12 (vzorec pro poloměr kružnice opsané). *V každém trojúhelníku ABC (při obvyklém značení) platí*

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}. \tag{60}$$

Důkaz. Dokažme první z rovností v (60). Trojúhelník ABC umístíme do souřadnicové soustavy Oxy tak, že bod B leží na ose x a střed kružnice opsané S leží v počátku. Označíme-li velikost $\sphericalangle CAB$ symbolem α, je velikost $\sphericalangle CSB$ rovna 2α (jde o úhly obvodové a středové příslušné oblouku kružnice opsané danému trojúhelníku). Je tedy $S\,[0,0]$, $B\,[r,0]$, $C\,[r\cos 2\alpha, r\sin 2\alpha]$. Spusťme z bodu C kolmici na x; patu této kolmice označme P. Platí $|CP| = r \sin 2\alpha$, $|PB| = r - r\cos 2\alpha$. V trojúhelníku CPB platí Pythagorova věta:

$$a^2 = (r - r\cos 2\alpha)^2 + r^2 \sin^2 2\alpha. \tag{61}$$

Umocníme, upravíme dle V.1 a dále dle V.3:

$$\begin{aligned} a^2 = r^2 - 2r^2\cos 2\alpha + r^2\cos^2 2\alpha + r^2 \sin^2 2\alpha = r^2 - 2r^2 \cos 2\alpha + r^2 = \\ = 2r^2(1-\cos 2\alpha) = 2r^2(1-\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = 4r^2\sin^2\alpha. \end{aligned} \tag{62}$$

Po odmocnění (délky všech stran i hodnoty $\sin\alpha$ pro přípustné úhly α jsou kladné) dostaneme $a = 2r\sin\alpha$, po vydělení $2\sin\alpha$ obdržíme levou část dokazované věty. Zbylé dvě rovnosti (pro b resp. c) již plynou ze sinové věty V.10. $\square$

Věta 13 (obsah trojúhelníka z délek stran). *V každém trojúhelníku ABC (při obvyklém značení) platí*

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta. \tag{63}$$

Důkaz. Dokažme rovnost $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, důkaz ostatních rovností je zcela analogický. Podobně jako při důkazu V.10 mohou nastat tři situace:

1) $\alpha < 90°$. Potom $v_c = b\sin\alpha$. Dále je $S = \frac{1}{2}cv_c$, za v_c dosadíme, dostaneme dokazovaný vztah.

2) $\alpha = 90°$. Trojúhelník je pravoúhlý, proto $S = \frac{1}{2}bc$. Upravíme na tvar $S = \frac{1}{2}bc\sin 90° = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$. Tím je vztah za zvolené podmínky dokázán.

3) $\alpha > 90°$. V trojúhelníku ABC zřejmě platí $v_c = b\sin(180° - \alpha)$. Protože $\sin(180° - \alpha) = \sin 180° \cos\alpha - \cos 180° \sin\alpha = \sin\alpha$, je také $v_c = b\sin(180° - \alpha) = b\sin\alpha$; dále je postup stejný jako v bodu 1). $\square$

Věta 14 (obsah trojúhelníka z poloměru kružnice opsané). *V každém trojúhelníku ABC (při obvyklém značení) platí*

$$S = \frac{abc}{4r}. \tag{64}$$

Důkaz. Podle V.12 je $2r = b/\sin\beta$, tedy $\sin\beta = b/2r$ (neboť pro $\beta \in (0°, 180°)$ je $\sin\beta \neq 0$). Podle V.13 je dále

$$S = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}ac\frac{b}{2r} = \frac{abc}{4r}. \tag{65}$$

Tím je věta dokázána. $\square$

Označme polovinu obvodu trojúhelníka symbolem s. Je tedy

$$s = \frac{O}{2} = \frac{a+b+c}{2}. \tag{66}$$

Znakem ϱ značíme (v dalším výkladu) podle obvyklé konvence poloměr kružnice vepsané.

Věta 15 (obsah trojúhelníka z poloměru kružnice vepsané). *V každém trojúhelníku ABC (při obvyklém značení) platí*

$$S = \varrho s. \tag{67}$$

D ů k a z. Rozdělme trojúhelník ABC na tři trojúhelníky úsečkami AS, BS, CS; S je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Tyto trojúhelníky mají délky stran a, b, c; výška příslušná (ke každé z těchto stran) má délku ϱ. Obsahy tří obdélníků můžeme snadno vyjádřit:

$$S_1 = \frac{a\varrho}{2}, \quad S_2 = \frac{b\varrho}{2}, \quad S_3 = \frac{c\varrho}{2}. \tag{67}$$

Obsah trojúhelníka ABC je dán součtem obsahů těchto tří trojúhelníků; v součtu vytkneme:

$$S = \frac{\varrho}{2}(a + b + c) = \varrho s. \tag{68}$$

Věta 16 (Heronův vzorec). *V každém trojúhelníku ABC (při obvyklém značení) platí*

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \tag{69}$$

D ů k a z. V každém trojúhelníku dle V.11 platí $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$; rovnost lze upravit na tvar $2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$. Dále je dle V.13 $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, po vynásobení čtyřmi dostaneme rovnost $2bc\sin\alpha = 4S$. Obě rovnosti, k nimž jsme nyní došli, umocníme na druhou, sečteme a vytkneme, dostaneme:

$$4b^2c^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 16S^2 + (b^2 + c^2 - a^2)^2, \tag{70}$$

$$4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = 16S^2. \tag{71}$$

Levou stranu rozložíme dle vzorce $a^2 - b^2$ na součin:

$$(2bc - b^2 - c^2 + a^2)(2bc + b^2 + c^2 - a^2) = 16S^2. \tag{72}$$

Členy na levé straně vhodně přeskupíme, vytkneme (-1) a upravíme dle vzorce $(a-b)^2$:

$$\left[a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)\right]\left[(b^2 + 2bc + c^2) - a^2\right] = 16S^2 \tag{73}$$

$$\left[a^2 - (b-c)^2\right]\left[(b+c)^2 - a^2\right] = 16S^2 \tag{74}$$

Algebraický vzorec $a^2 - b^2$ užijeme ještě jednou, naposledy; přitom vydělíme rovnici číslem 16 a toto číslo ve jmenovateli na levé straně zapíšeme jako $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$:

$$\frac{a-b+c}{2}\frac{a+b-c}{2}\frac{b+c-a}{2}\frac{b+c+a}{2} = S^2. \tag{75}$$

Členy na levé straně jsou ovšem po řadě $s-b$, $s-c$, $s-a$ a s. Dostali jsme tedy rovnost

$$s(s-a)(s-b)(s-c) = S^2, \tag{76}$$

po odmocnění (S je nezáporné) dostaneme rovnost (69). Tím je důkaz dokončen. $\square$

Sazba: Honsoft, 2008.