Definice a vlastnosti funkcí

Učební text pro druhý ročník (sextu) gymnázia

V tomto textu jsou definovány základní, obecné pojmy týkající se funkcí. Součástí textu nejsou (velmi důležité!) obrázky; ty si studenti během výuky doplňují podle výkladu vyučujícího. Součástí práce s textem je také využití pracovních listů s grafy různých funkcí; při této práci se nabyté znalosti aplikují. V textu je záměrně zvolena odlišná symbolika od symboliky rozšířené v učebnicích; autor je dosti nezvratně přesvědčen o jejích přednostech. Připomínky jsou (opět) vítány. (Poslední úprava: 18. prosince 2011.)

1. Základní pojmy

Funkce f na množině $\mathrm{D}(f) \subset R$ je zobrazení množiny $\mathrm{D}(f)$ do množiny $\mathbf{R}$. Množina $\mathrm{D}(f)$ se nazývá **definiční obor** funkce.[1]) Množina všech hodnot, kterých funkce f na svém definičním oboru $\mathrm{D}(f)$ nabývá, se nazývá **obor hodnot** funkce f a značí se $\mathrm{H}(f)$. Je tedy

$$\mathrm{H}(f) := \{f(x);\, x \in \mathrm{D}(f)\}.$$

Poznámka 1. Funkce je tedy popsána nejen oním zmíněným předpisem, ale také definičním oborem. Ve školské matematice se někdy řeší úlohy typu „najděte definiční obor funkce“. Tím se rozumí najít „co největší“ množinu, v níž má daný předpis smysl. □

Poznámka 2. Pojem „zobrazení“ užitý v definici funkce se zavádí pomocí relací. Pokud relace nebyly (např. v semináři) probrány, stačí tato představa: Zobrazení $X \to Y$ je předpis, který každému $x \in X$ přiřazuje (jednoznačně definovaný) prvek množiny Y. □

Funkce označujeme zpravidla (malými i velkými) písmeny latinské abecedy, nejčastěji ovšem užíváme písmeno f. Označení funkce je třeba důsledně odlišovat od označení **hodnoty funkce** v daném bodě; označení bodu píšeme do závorky za označení funkce, obecně např. $f(x)$. Konkrétně např. $f(4)$ znamená hodnotu funkce f pro $x = 4$; zápis má smysl pouze v případě, že $4 \in \mathrm{D}(f)$.

Příklad. Funkce definovaná v množině $\mathbf{R}$ předpisem $f(x) = x^2$ přiřazuje každému číslu jeho druhou mocninu. Funkce g definovaná na $\mathbf{R}_+ \cup \{0\}$ předpisem $g(x) = \sqrt{x}$ přiřazuje každému nezápornému číslu jeho odmocninu. □

Poznámka 3. V učebnicích se objevují i jiná označení funkcí, často se např. místo výše uvedeného píše $y = x^2$ či $y = \sqrt{x}$. Ačkoliv je tento zápis ve středních školách rozšířený, zbytečnému y se raději budeme vyhýbat. □

Graf funkce f ve zvolené soustavě souřadnic Oxy v rovině je množina všech bodů X o souřadnicích $[x, f(x)]$, kde $x \in \mathrm{D}(f)$.

Poznámka 4. Matematicky ne zcela korektně, ale snad názorně lze říci: „Rovinná křivka“ je grafem funkce, jestliže každá z rovnoběžek s osou y protne tuto křivku nejvýše v jednom bodě. Definiční obor je množina všech kolmých průmětů do osy x všech bodů této křivky; obor hodnot je množina všech kolmých průmětů do osy y všech bodů této křivky.

---

[1]) Funkce v tomto smyslu se přesně nazývá „reálná funkce jedné reálné proměnné“. Protože se však jiné funkce v gymnáziu nestudují, stačí říkat krátce „funkce“. Teprve ve vysoké škole se čtenář seznámí např. s komplexními funkcemi nebo s funkcemi více proměnných.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

2. Prostá funkce

Říkáme, že funkce f je **prostá**, platí-li implikace

$$x_1 \in \mathrm{D}(f),\, x_2 \in \mathrm{D}(f),\, x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2); \tag{2.1}$$

„názorně“ řečeno: funkce je prostá, pokud se žádná její hodnota v oboru hodnot neopakuje. Jak je patrné, je implikace (2.1) ekvivalentní s implikací

$$x_1 \in \mathrm{D}(f),\, x_2 \in \mathrm{D}(f),\, f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2. \tag{2.2}$$

Poznámka. Graf funkce je grafem prosté funkce, neexistuje-li rovnoběžka s osou x, která má s grafem společný více než jeden bod.

3. Monotonie funkce

Říkáme, že funkce f je **rostoucí** na svém definičním oboru, právě když pro všechna $x_1 \in \mathrm{D}(f)$, $x_2 \in \mathrm{D}(f)$ platí implikace:

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2).$$

Říkáme, že funkce f je **klesající** na svém definičním oboru, právě když pro všechna $x_1 \in \mathrm{D}(f)$, $x_2 \in \mathrm{D}(f)$ platí implikace:

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2).$$

Říkáme, že funkce f je **neklesající** na svém definičním oboru, právě když pro všechna $x_1 \in \mathrm{D}(f)$, $x_2 \in \mathrm{D}(f)$ platí implikace:

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2).$$

Říkáme, že funkce f je **nerostoucí** na svém definičním oboru, právě když pro všechna $x_1 \in \mathrm{D}(f)$, $x_2 \in \mathrm{D}(f)$ platí implikace:

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2).$$

Funkce f se nazývá **monotónní** v $\mathrm{D}(f)$, je-li tam buď neklesající, nebo nerostoucí. Funkce f se nazývá **ryze monotónní** v $\mathrm{D}(f)$, je-li tam buď rostoucí, nebo klesající.

Poznámka. Často se vyjadřujeme stručněji; říkáme např. „funkce roste v $\mathrm{D}(f)$“. Někdy také bývá účelné zabývat se monotonií funkce na „menší množině“ než je definiční obor, speciálně na nějakém **intervalu**. Označme takový interval J, je tedy $J \subset \mathrm{D}(f)$. Potom definujeme:

Říkáme, že funkce f je **rostoucí v intervalu** J, právě když pro všechna $x_1 \in J$, $x_2 \in J$ platí implikace:

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2).$$

Říkáme, že funkce f je **klesající v intervalu** J, právě když pro všechna $x_1 \in J$, $x_2 \in J$ platí implikace:

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2).$$

Definice funkce **neklesající** či **nerostoucí na intervalu** J si jistě pilný čtenář doplní sám. $\square$

Existuje jistá souvislost mezi prostotou funkce a její monotonií, vyjadřuje ji následující věta:

Věta. *Nechť je funkce f ve svém definičním oboru rostoucí nebo klesající. Pak je f prostá.*

Důkaz. Provedeme např. pro funkci rostoucí. Předpokládáme tedy, že funkce f je rostoucí. Potom ovšem pro libovolné prvky x_1, x_2 z definičního oboru $\mathrm{D}(f)$, které splňují podmínku $x_1 \neq x_2$, platí buď nerovnost $x_1 < x_2$, nebo $x_1 > x_2$. Je-li $x_1 < x_2$, pak – protože f je funkce rostoucí v $\mathrm{D}(f)$ – je také $f(x_1) < f(x_2)$, a tedy $f(x_1) \neq f(x_2)$. Naopak je-li $x_1 > x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$, a opět $f(x_1) \neq f(x_2)$. Celou tuto úvahu lze vyjádřit implikací (2.1); funkce f je tedy prostá, což bylo dokázati. Důkaz pro funkci klesající se provede analogicky. $\square$

4. Funkce sudá a lichá

Říkáme, že funkce f je **sudá**, má-li tyto dvě vlastnosti:
1. Její definiční obor splňuje podmínku $x \in \mathrm{D}(f) \Rightarrow -x \in \mathrm{D}(f)$ (tj. na číselné ose je symetrický podle počátku).
2. Pro každé $x \in \mathrm{D}(f)$ je $f(-x) = f(x)$.

Říkáme, že funkce f je **lichá**, má-li tyto dvě vlastnosti:
1. Její definiční obor splňuje podmínku $x \in \mathrm{D}(f) \Rightarrow -x \in \mathrm{D}(f)$ (tj. na číselné ose je symetrický podle počátku).
2. Pro každé $x \in \mathrm{D}(f)$ je $f(-x) = -f(x)$.

Poznámka. Graf sudé funkce je (osově) souměrný podle osy y; graf liché funkce je (středově) souměrný podle počátku.

5. Omezená funkce, maximum a minimum

Funkce $f : X \to \mathbf{R}$ (kde X je libovolná množina) se nazývá **shora omezená** v X, existuje-li číslo $h \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in X$ je $f(x) \leq h$.

Funkce $f : X \to \mathbf{R}$ (kde X je libovolná množina) se nazývá **zdola omezená** v X, existuje-li číslo $d \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in X$ je $f(x) \geq d$.

Říkáme, že funkce f je **omezená**, je-li omezená shora i zdola.

Poznámka 1. Často se uvažuje o omezenosti funkce na celém definičním oboru, pak množinou X z definice rozumíme množinu $\mathrm{D}(f)$.

Poznámka 2. Jak je z definice patrné, je funkce f omezená právě tehdy, je-li její obor hodnot $\mathrm{H}(f)$ omezená množina, speciálně omezený interval. $\square$

Nechť X je libovolná množina. Říkáme, že funkce $f : X \to \mathbf{R}$ má v bodě $a \in X$ **maximum** vzhledem k množině X, platí-li implikace

$$x \in X \Rightarrow f(x) \leq f(a).$$

Nechť X je libovolná množina. Říkáme, že funkce $f : X \to \mathbf{R}$ má v bodě $b \in X$ **minimum** vzhledem k množině X, platí-li implikace

$$x \in X \Rightarrow f(x) \geq f(b).$$

Nastane-li jeden z uvedených případů, říkáme, že funkce f má v bodě a resp. b **extrém**.

Poznámka 1. Říkáme, že maximum je **ostré**, platí-li implikace $x \in X$, $x \neq a \Rightarrow f(x) < f(a)$; podobně je minimum ostré, platí-li tato analogická implikace: $x \in X$, $x \neq b \Rightarrow f(x) > f(b)$.

Poznámka 2. Množinou X bývá často $\mathrm{D}(f)$, hovoříme pak o maximu či minimu na celém definičním oboru.

Příklad. Dokažme, že lineární funkce $f(x) = 3x$ nemá maximum. Budeme dokazovat sporem. Předpokládejme tedy, že f maximum má, a to v bodě a. Potom ovšem pro všechna $x \in \mathrm{D}(f)$ platí $f(x) \leq f(a)$, tedy $3x \leq 3a$. Zvolme nyní $x_0 \in \mathrm{D}(f)$ takové, že $x_0 > a$. Vynásobíme-li tuto rovnost třemi, dostaneme $3x_0 > 3a$, tedy $f(x_0) > f(a)$, což ve sporu s předpokladem na počátku důkazu. Závěr: funkce f nemá maximum. $\square$

6. Periodická funkce

Je-li $p \in \mathbf{R}_+$, $k \in \mathbf{Z}$ a $\mathrm{D}(f) \subset \mathbf{R}$, říkáme, že funkce f je p-**periodická**, jestliže zároveň platí implikace $x \in \mathrm{D}(f) \Rightarrow x + kp \in \mathrm{D}(f)$ a rovnost $f(x + kp) = f(x)$. Číslo p se nazývá **perioda funkce** f.

Pokud v množině čísel, která jsou periodami periodické funkce f, existuje nejmenší kladné číslo, nazýváme ho **nejmenší perioda** funkce f.

7. Inverzní funkce

Začněme krátkou úvahou: Nechť funkce f má definiční obor $\mathrm{D}(f)$ a obor hodnot $\mathrm{H}(f)$. Potom pro každé $y \in \mathrm{H}(f)$ existuje *alespoň jedno* $x \in \mathrm{D}(f)$ takové, že $f(x) = y$. Je-li navíc f funkce prostá, existuje takové x *právě jedno*. V takovém případě má dobrý smysl tato definice:

Je-li f prostá funkce s definičním oborem $\mathrm{D}(f)$ a oborem hodnot $\mathrm{H}(f)$, definujeme funkci f_{-1} k ní **inverzní** takto: Definičním oborem funkce f_{-1} je množina $\mathrm{H}(f)$ a pro každé $y \in \mathrm{H}(f)$ je $f_{-1}(y)$ ono $x \in \mathrm{D}(f)$, pro něž je $f(x) = y$.

Poznámka 1. V učebnicích se inverzní funkce značí (bohužel) obvykle symbolem f^{-1}. Protože tento symbol se v matematice užívá pro převrácenou hodnotu (je přece $1/a = a^{-1}$), označuje v takových učebnicích *týž symbol* dva naprosto *odlišné pojmy*, což je v seriózní matematice nepřípustné. Proto se tomuto symbolu vyhýbáme; čtenář nechť si uvedený fakt zapamatuje a poučí se z něj. Ostatně, i v tzv. běžném životě dochází mnohokrát k hlubokým nedorozuměním, označují-li lidé týmž slovem (např. láska) pojmy s naprosto odlišným obsahem. $\square$

Poznámka 2. Při hledání inverzní funkce f_{-1} k funkci f postupujeme ve čtyřech krocích: 1) přesvědčíme se, zda f je prostá (a není-li f prostá na celém definičním oboru, můžeme dále pracovat na nějakém intervalu, v němž prostá je, viz např. funkce druhá odmocnina), 2) v předpisu, jímž je f definována, píšeme $f_{-1}(x)$ místo x a x místo $f(x)$, 3) vyjádříme $f_{-1}(x)$, 4) určíme definiční obor $\mathrm{D}(f_{-1})$ jako $\mathrm{D}(f_{-1}) = \mathrm{H}(f) = f(\mathrm{D}(f))$. Pro přehlednost píšeme někdy místo $f(x)$ pouze y. $\square$

Poznámka 3. Protože graf funkce f ve zvolené soustavě souřadnic Oxy v rovině je množina všech bodů X o souřadnicích $[x, f(x)]$ (kde $x \in \mathrm{D}(f)$), je grafem funkce f_{-1} inverzní k f množina všech bodů o souřadnicích $[f(x), x]$ (kde $x \in \mathrm{D}(f)$). Graf funkce f_{-1} vznikne z grafu funkce f tak, že každy bod o souřadnicích $[x, y]$ nahradíme bodem o souřadnicích $[y, x]$. Protože tyto dva body jsou osově symetrické vzhledem k přímce o rovnici $y = x$, která je osou 1. a 3. kvadrantu souřadnicové soustavy, vznikne graf f_{-1} z grafu funkce f jako jeho obraz v osové souměrnosti podle osy prvního a třetího kvadrantu. $\square$

O monotonii prosté funkce a o monotonii funkce k ní inverzní platí tato věta:

Věta. *Je-li $X \subset \mathbf{R}$ a je-li funkce f rostoucí resp. klesající v X, platí totéž o funkci f_{-1} v $f(X)$.*

Důkaz. Provedeme pro rostoucí funkce; pro funkce klesající je analogický. Máme tedy dokázat, že platí

$$y_1 \in f(X),\, y_2 \in f(X),\, y_1 < y_2 \;\Rightarrow\; f_{-1}(y_1) < f_{-1}(y_2). \tag{7.1}$$

Označíme-li $x_1 := f_{-1}(y_1)$ a $x_2 := f_{-1}(y_2)$, je $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ a $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, takže implikace (7.1) je ekvivalentní s implikací

$$x_1 \in X,\, x_2 \in X,\, x_1 \geq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2). \tag{7.2}$$

Tato implikace plyne z předpokladu, že je f rostoucí – tím je platnost (7.1), a tedy i celé věty dokázána. $\square$

Tím tento krátký přehled (obecných) vlastností funkcí končí, dále se budeme věnovat konkrétním funkcím a jejich vlastnostem.