Úvodní poznámka editora

V této *Sbírce úloh* jsou shromážděny úlohy, které typově odpovídají úlohám, jež se objeví v ústní části maturitní zkoušky z matematiky ve třídách, kde vyučuje Jan Voženílek. O jednotlivých částech a průběhu ústní maturitní zkoušky podrobně informuje dokument *Obecný popis uspořádání maturitní zkoušky z matematiky*; zde pouze připomeňme, že maturitní otázky budou konstruovány „napříč" učebními celky, zatímco tato sbírka ve svém uspořádání (z praktických důvodů) tyto tradiční celky respektuje.

Před příklady je zařazen přehled důkazů matematických vět požadovaných v části zkoušky nazvané *Deduktivní výstavba matematiky*. Naopak v závěru jsou připojeny (typové) otázky k první (*Elementární úloha*) a druhé (*Úloha řešená obrazem*) části *Orientace*. Vedle této sbírky existují ještě další pomocné studijní materiály (např. přehled pojmů, obrázky ke zbývajícím dvěma částem orientace); vše je k dispozici na webu vyučujícího: `http://jan.gfxs.cz`.

Sbírka není „originálním matematicko-didaktickým dílem", neboť je tvořena (někdy mírně upravenými) úlohami přejatými z různých sbírek maturitních příkladů vydaných v posledních šedesáti letech. Další příklady jsou čerpány z běžných středoškolských učebnic, z učebnic pro matematické třídy a z literatury k matematické olympiádě. Několik úloh (asi dva páry) se do sbírky „přestěhovalo" z materiálů zkušené kolegyně M. Slezákové.

Pozorný čtenář si povšimne, že jsou zde obsaženy některé úlohy, které již zná z publikace *Sbírka úloh z matematiky pro matematickou část Matematicko-fysikálně-informatického semináře s podvečerní anglickou konverzací* vydané v červnu 2006 *Spolkem pro pořádání výjezdového semináře*; naopak některé úlohy (které se v semináři neosvědčily) byly vypuštěny.

Sbírka byla vysázena typografickým systémem $\mathcal{AMS}$-TEX. Editor děkuje slečnám Michaele Bučkové, Petře Drásalové a Petře Kulhánkové za přepsání částí některých úloh do elektronické podoby. V této první verzi sbírky budou (s pravděpodobností rovnou jedné) chyby tiskové i obsahové; editor prosí laskavé čtenáře, aby na ně upozornili.

-jvk-

V Liberci, v den sv. Silvestra 2006.

OBSAH

B má hmotnost m_2 a poločas přeměny T_2, přitom $m_1 > m_2$, $T_1 < T_2$. Za jakou dobu budou hmotnosti obou látek stejné?

113. Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici $\log^2_{\sqrt{2}} x + 3\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} x = 2$.

114. Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici $\log_4 (2\log_3 (1 + \log_2(1 + 3\log_2 x))) = \frac{1}{2}$. Grafy některých funkcí vystupujících v rovnici znázorněte v rovině.

115. Řešte v $\mathbf{R}^2$ soustavu rovnic $\begin{cases} 2^x \cdot 4^y = 8\sqrt{2} \\ \ln(x+y) = 0 \end{cases}$.

116. Určete definiční obor funkce f dané předpisem pro funkční hodnoty

$$f(x) = \log\left(1 - \sqrt{\frac{x-4}{x+1}}\right).$$

117. Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici $|\cos x|^{\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}} = 1$.

118. Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8}$.

119. Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$.

120. Řešte v $\mathbf{R}$ nerovnici $\left|\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} - \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right| \leq 2$.

121. Dokažte, že platí identita

$$\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x} = \operatorname{tg} 4x.$$

122. Řešte v $\mathbf{C}$ rovnici $(x^3 - 1)^2 + (x^3 + 1)^2 = 0$.

123. Řešte v $\mathbf{C}$ rovnici rovnici $x^6 - 1 = 0$. Postupujte dvěma různými způsoby.

124. Řešte v $\mathbf{C}^2$ soustavu rovnic $\begin{cases} x + y = -i \\ x^2 + y^2 = -1 \end{cases}$

125. Určete množinu všech komplexních čísel, jejichž poměr vzdáleností od čísel 0 a 3 je konstantní a rovná se 2.

126. Řešte v $\mathbf{C}$ rovnici $12x^4 - 4x^3 - 41x^2 - 4x + 12 = 0$.

Planimetrie a stereometrie

201. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, je-li dán jejich $o = 12$ cm, úhly $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$.

202. Vysvětlete pojem *Pappova úloha*. Stanovte počet takových úloh. Řešte Pappovu úlohu: Je dána kružnice $l(O; r)$ a její vnější přímka t s bodem A. Sestrojte kružnici, která se dotýká dané přímky t v bodě A a dané kružnice l.

617. Rozhodněte o pravdivosti výroku $\log_{0,4} 7{,}5 < \log_{0,4} 7{,}1$ a o pravdivosti výroku $\log_{1,4} 7{,}5 < \log_{1,4} 7{,}1$.

618. Rozhodněte o pravdivosti těchto výroků. Nepravdivé výroky znegujte.
a) Existují aspoň dvě různá komplexní čísla z_1, z_2 taková, že jejich podíl je číslo reálné.
b) Pro každé číslo $z \in \mathbf{C}$ platí: $z = 1/z$.
c) Pro každá dvě čísla $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ taková, že $z_1 \neq z_2$, platí: $|z_1| \neq |z_2|$.

619. Rozhodněte o pravdivosti těchto výroků. Nepravdivé výroky znegujte.
a) Pro všechna komplexní čísla z platí: Absolutní hodnota čísla z je číslo reálné.
b) Existuje aspoň jedno komplexní číslo z takové, že $|z|$ je číslo komplexní.
c) Všechny komplexní jednotky mají stejnou absolutní hodnotu.

620. Vyslovte větu o vztahu spojitosti funkce a existenci její derivace v daném bodě. Vyslovte větu obrácenou a obměněnou a rozhodněte o pravdivosti těchto tří vět. Ilustrujte svá tvrzení vhodnými příklady.

621. Jsou dány množiny $A := \{x \in \mathbf{Z}; x \leq -3\}$, $B := \{x \in \mathbf{Z}; x < -7\}$. Určete $A - B$ a $B - A$.

622. Nechť $A := \{1, 2, 3\}$, $B := \langle 0, 2\rangle$, $C = (-\infty, 1)$. Určete $A \cap B \cap C$, $(A \cup B) \cap C$, $A - B$, $C - B$.

623. Nechť $A := \{x \in \mathbf{R}; , |x - 3| < 2\}$, $B := (-\infty, 2\rangle \cup \langle 5, +\infty)$. Určete $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$.

624. Rozhodněte, které z uvedených relací definovaných v množině všech žáků vaší třídy jsou reflexívní, symetrické, tranzitivní: a) x je starší než y, b) x má stejné křestní jméno jako y, c) x nemá na posledním pololetním vysvědčení lepší známku z chemie než y.

625. Rozhodněte, které z uvedených relací definovaných v množině všech obyvatel Liberce jsou reflexívní, symetrické, tranzitivní: a) x se narodil v témž roce jako y, b) x je bratr y, c) x je syn y, d) x bydlí ve stejném domě jako y.

626. Rozhodněte, které z uvedených relací definovaných v množině všech kružnic dané roviny jsou reflexívní, symetrické, tranzitivní: a) x leží vně y, b) x leží uvnitř y, c) x se dotýká y, d) x a y mají týž střed.

310. Jsou dány body $A\,[1,3,-2]$, $B\,[3,-2,5]$, $C\,[0,1,7]$, $D\,[8,0,3]$. Vypočítejte a) obsah stěny ABC čtyřstěnu $ABCD$, b) objem čtyřstěnu $ABCD$, c) velikost úhlu BCD.

311. Určete průsečnici rovin

$$\tau: x = 3 + 4t + p,\ y = -6t,\ z = -2 + 2t + p;\ t, p \in \mathbf{R},$$
$$\sigma: x = 3 + 2r - 2s,\ y = -3 + s,\ z = -2 + r + s;\ r, s \in \mathbf{R}.$$

312. Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, velikost jeho podstavné hrany $a = 6$, výška jehlanu je $v = 3\sqrt{2}$. a) Vypočítejte odchylku přímek BC a AV. b) Zjistěte odchylku přímky AV od roviny podstavy jehlanu. c) Určete odchylku roviny ADV a roviny podstavy jehlanu.

313. Jsou dány body $A\,[2,2,3]$, $B\,[6,3,0]$, $C\,[3,-1,-1]$. Na ose x určete bod X tak, aby objem čtyřstěnu $ABCX$ byl 26.

314. Účinná reklama je v obchodu nezbytná. Reklamní agentura postavila na náměstí poutač tvaru pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$, kde $|AB| = a$, $|AV| = a$. a) Určete odchylku roviny ϱ podstavy a roviny boční stěny jehlanu. b) Určete odchylku boční hrany CV od roviny ϱ podstavy jehlanu.

315. V pravidelném čtyřbokém jehlanu $ABCDV$ je dáno: $|AB| = a$, $|AV| = a$. a) Určete odchylku dvou sousedních bočních stěn jehlanu. b) Určete vzdálenost vrcholu A od přímky $p = VC$.

316. Je dána hyperbola $x^2 - 9y^2 = 1$ a bod $M\,[3,1]$. a) Určete velikosti poloos hyperboly. b) Zjistěte polohu bodu M vzhledem k hyperbole. c) Napište rovnici všech přímek, které procházejí bodem M a mají s hyperbolou právě jeden společný bod.

317. a) Charakterizujte kuželosečku $x^2 + 4y^2 = 20$. b)Vepište do kuželosečky čtverec. c) Vypočítejte velikost strany tohoto čtverce. d) Ve vrcholech čtverce veďte tečny ke kuželosečce. Napište rovnici alespoň jedné takové tečny. e) Vypočítejte odchylku těchto tečen.

318. Nalezněte rovnici kružnice, která má střed na přímce $p: 2x + y = 0$ a dotýká se přímek r, s, kde $r: 4x - 3y + 10 = 0$, $s: 4x - 3y - 30 = 0$.

319. Je dána elipsa $5x^2 + 9y^2 = 45$ a bod $M\,[0,-3]$. a) Dokažte, že M je bodem vnější oblasti elipsy. b) Napište rovnice tečen elipsy procházející bodem M. c) Vypočtěte odchylku těchto tečen.

ných. Vytáhnou 3 tělesa. Jaká je pravděpodobnost, že vytažená tělesa svými barvami vytvoří kompletní trikoloru SRN, jestliže a) všechny tři hyperboloidy vytáhnou najednou, b) hyperboloidy táhnou postupně a vytažené hyperboloidy do osudí nevracejí, c) hyperboloidy táhnou postupně; vytažený hyperboloid je (před další tahem) vrácen zpět do osudí.

Diferenciální a integrální počet

501. Vypočtěte:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}.$$

502. Vypočtěte:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{4 + 2n - 3n^2 + 5n^3 - 2n^5}{1 - 100n^4 - 3n^5}.$$

503. Vypočtěte:
$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin x}.$$

504. Napište rovnici tečny v bodě $x = 2$ ke křivce $y = \frac{x^2-3}{x-1}$.

505. Napište rovnici tečny k asteroidě o rovnici $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2$ v bodě $T\,[1,1]$.

506. Ve kterém bodě má parabola $y = 2x^2 + 3x - 1$ tečnu a) se směrovým úhlem $45°$, b) rovnoběžnou s přímkou $5x - y + 3 = 0$?

507. Určete tečny ke křivce $y = x^3 + x^2 - 2x$ v jejích průsečících s osou x.

508. Z desky tvaru trojúhelníku, jehož jistá strana má délku a a výška k této straně délku v (úhly při této straně jsou ostré), má být vyříznuta obdélníková deska, přičemž jedna strana obdélníku je částí oné strany trojúhelníka o délce a. Určete rozměry obdélníku tak, aby jeho obsah byl maximální.

509. Z lepenky tvaru čtverce o straně a se mají v rozích vyříznout čtverce o straně délky x tak, aby vznikla síť kvádru bez horní podstavy; objem kvádru má být největší. Určete x.

510. Určete rozměry válce tak, aby při daném objemu V měl nejmenší povrch.

511. Fysikální úloha: V nádobě je voda s hladinou ve výšce h. Jak vysoko nad dnem je třeba udělat otvor ve stěně, aby voda stříkala co nejdále?

512. Vlastnictví je třeba chránit. Je tedy nutno oplotit výběh pro slepice, který má mít tvar pravoúhelníku. Přitom je k dispozici 200 m pletiva; část že mezi mrtvými byl: a) aspoň jeden Bratislavan, b) právě jeden Bratislavan, c) žádný Bratislavan, d) všichni Bratislavané?

423. Úlohy z lékařského výzkumu: a) Dva lékaři stanoví správnou diagnózu určité nemoci v 8, resp. v 9 případech z 10. Vyšetřují-li téhož pacienta, který má tuto nemoc, nezávisle na sobě, jaká je pravděpodobnost, že pacientovi bude stanovena aspoň jedna správná diagnóza? b) Diagnostický test na určité onemocnění je pozitivní s pravděpodobností 0,99, je-li pacient skutečně nemocen. Testu se podrobí 30 pacientů, u nichž je podezření na toto onemocnění. Připusťme, že jsou všichni skutečně nemocní; jaká je pravděpodobnost, že nám žádné (z těch 30) onemocnění neunikne?

424. V osmdesátých letech fungoval v libereckých dopravních prostředcích MHD tento způsob odbavení cestujících: Cestující zakoupil v předprodeji jízdenku, která měla v dolní části obrazec:

7	8	9
4	5	6
1	2	3

Po nástupu do vozidla vložil jízdenku do znehodnocovače, který právě do p políček obrazce vyštípl otvory, přitom v tramvaji $p = 3$, v autobusu $p = 4$. Nepoctivý cestující by mohl postupovat takto: Zakoupil by dostatečný počet jízdenek, vyštípal by do nich kleštěmi všechny kombinace, a pak štípal jen bílé papírky, podle nichž by ze své sbírky vybral vždy tu správnou jízdenku, kterou by pak předložil revizorovi. a) Kolik jízdenek by bylo potřeba k uskutečnění tohoto plánu? b) Jaká je pravděpodobnost, že by cestující při bleskové kontrole vytáhl náhodně ze zásoby jízdenek právě tu správnou? c) Kolik korun ušetří za první rok nepoctivec oproti poctivému člověku, jestliže oba jezdí třikrát denně a jízdenka stojí 1 Kčs?
Aby nepoctivý cestující urychlil hledání správné jízdenky, svůj plán ještě vylepšil: V první kapse má všechny jízdenky, jejichž první vyštípnutý otvor (počítáno zespodu zleva) je v políčku 1, v druhé kapse má všechny jízdenky, jejichž první vyštípnutý otvor je v políčku 2, atd. d) Kolik kapes cestující potřebuje pro realizaci tohoto systému? e) Jaká je pravděpodobnost, že vytáhne správnou jízdenku, ví-li, že první vyštípnuté políčko je 4 a ve volbě kapsy se nesplete?

425. Karl a Egon připravili v městě pod Ještědem loterii pro krajanské sdružení. V osudí jsou tělíska tvaru rotačního hyperboloidu: 3 zlatá, 4 červená a 5 čer-

320. Dokažte, že rovnice $x^2 - 12y - 4x - 40 = 0$ je rovnicí paraboly. Určete tečnu této paraboly, která je kolmá k přímce $2x - 3y + 10 = 0$.

321. Určete společné body rovnoosé hyperboly $x^2 - y^2 = 25$ a přímky $y = kx + q$, tzn. proveďte diskusi vzhledem ke směrnici k a parametru q.

322. Jsou dány body $M\,[-3, 0]$, $N\,[3, 0]$ a přímka p určená rovnicí

$$p:\ 4x + 5(2 - \sqrt{3}) \cdot y - 20 = 0.$$

Určete množinu všech bodů P ležící na přímce p tak, aby obvod trojúhelníku MNP byl roven 16.

323. Film Davida Lynche *Mulholland Drive* začíná záběry silnice natočenými z jedoucího auta; tma je prosvětlována jen dvěma reflektory automobilu. Průměr parabolického automobilového reflektoru je 24 cm, hloubka reflektoru je 12 cm. Určete rovnici parabolického řezu a vypočtěte polohu vlákna žárovky, je-li reflektor zapnut na dálková světla.

324. Balistický problém: Náboj je vystřelen rychlostí v pod elevačním úhlem $0 < \alpha < 90°$ nad horizontální rovinou. K odporu vzduchu nepřihlížíme. a) Napište rovnici trajektorie náboje. b) Určete dolet. c) Zjistěte výšku výstupu náboje.

325. Načrtněte graf funkce

$$f(x) = \frac{2x + 4}{x - |6 - 2x|}.$$

326. Plechová válcová nádoba o průměru d a výšce v je opatřena držákem tvaru půlkruhu o poloměru $v/2$. Určete, jak závisí obsah S spotřebovaného plechu na průměru d při daném v. Určete parametr a vrchol paraboly, jejíž část je grafem funkce $S(d)$.

Diskrétní matematika

401. Dokažte, že číslo $2^{3k} + 3^{4k}$ není pro žádné $k \in \mathbf{N}$ dělitelné číslem 73.

402. Dokažte, že největší $x \in \mathbf{Z}$, pro které platí $x^{x^{x^x}} < 1000^{1000^{1000}}$, je číslo 5.

403. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbf{N}$ a pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $|\sin nx| \le n\,|\sin x|$.

404. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí: $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

405. V rovině je dán konečný počet přímek a ty ji dělí na části. Dokažte, že tyto části je možno vybarvit dvěma barvami tak, aby každá část byla vybarvena

608. Na základě platnosti výroků $A \vee B$ a $A \Rightarrow B$ kdosi usoudil, že platí i výrok $A \wedge B$. Je tento úsudek správný?

609. Víme, že z pěti výroků A, B, C, D, E první platí a že jsou pravdivé implikace $A \Rightarrow B$, $C \Rightarrow B'$, $A' \Rightarrow E'$, $E \Rightarrow D$, $C' \Rightarrow D'$. Sestrojte přímý důkaz pravdivosti výroku E'.

610. Víme, že z pěti výroků A, B, C, D, E první platí a že jsou pravdivé implikace $A \Rightarrow B$, $C \Rightarrow B'$, $A' \Rightarrow E'$, $E \Rightarrow D$, $C' \Rightarrow D'$. Sestrojte nepřímý důkaz pravdivosti výroku E'.

611. Víme, že jsou pravdivé implikace $A \Rightarrow B$, $C \Rightarrow B'$, $\mathrm{D}' \Rightarrow E'$, $E \Rightarrow A$, $\mathrm{D} \Rightarrow C$. Dokažte, že platí-li výrok C, pak platí i výrok E'.

612. Rozhodněte o pravdivosti výroků; tvrzení ilustrujte příklady:
a) Absolutní hodnota opačného čísla k nějakému číslu kladnému je vždy číslo nezáporné.
b) Opačné číslo k nějakému zápornému celému číslu je vždy číslo racionální.
c) Existují dvě různá $x \in \mathbf{R}$, pro něž je $x^2 = 4$.

613. Rozhodněte o pravdivosti výroků; tvrzení ilustrujte příklady:
a) Číslo $\frac{1}{2}$ lze napsat desetinným číslem, zatímco číslo $\frac{1}{3}$ nikoliv.
b) Nerovnice $|x+4| > -1$ nemá žádné reálné řešení.
c) Interval $\langle 0, 1\rangle$ je nekonečná množina.
d) $\langle -1, 2\rangle \cap \langle 2, 3) = \{2\}$.

614. Kvantifikované výroky vyjádřete slovy a rozhodněte o pravdivosti. Nepravdivé výroky upravte tak, aby se staly výroky pravdivými; postupujte přitom nápaditěji, než pouhým užitím rčení: „Není pravda, že … “
a) $\forall x \in \mathbf{R}: \ x^2 > 0$,
b) $\forall x \in \mathbf{R}: \ \sqrt{x^2} = x$,
c) $\forall x \in \mathbf{R}\, \exists y \in \mathbf{Z}: \ x \cdot y = 10$.

615. Pro každé přirozené číslo uvažujme implikaci: „Je-li ciferný součet daného čísla dělitelný devíti, pak je toto číslo dělitelné třemi.“ Vyslovte a) obměněnou implikaci, b) obrácenou implikaci, c) negaci původní implikace. Rozhodněte o platnosti všech čtyř výroků.

616. Uvažujme o větě: „Každé složené číslo n je dělitelné aspoň jedním prvočíslem $p \leqq \sqrt{n}$.“ Vyslovte větu obměněnou, obrácenou a negaci původní věty.

203. Je dána přímka p a kružnice $k(S; r)$, $l(O; \varrho)$, kde $S \neq O$, $r > \varrho$. Sestrojte všechny přímky rovnoběžné a danou přímkou p, na nichž kružnice k, l vytínají stejně dlouhé tětivy.

204. Řešte parametrický systém úloh požadující konstrukci trojúhelníku ABC, je-li dáno c, α, $a-b$; oborem parametru α je interval $(0; \varphi)$, $c \in \mathbf{R}_+$, $a - b \in \mathbf{R}_+$.

205. Sestrojte lichoběžník, je-li dáno $a + c = 4$ cm, $b = 3$ cm, $e + f = 6$ cm, $|\sphericalangle ASB| = \omega = 125°$.

206. Vysvětlete pojem *Apollóniova úloha*. Stanovte počet takových úloh. Řešte jednu Apollóniovu úlohu: Jsou dány dvě různoběžky a, b a bod M ($M \notin a$, $M \notin b$). Sestrojte kružnici, která prochází bodem M a dotýká se přímek a, b.

207. V rovině jsou dány body A, B, C neležící v přímce. Najděte takový bod X této roviny, že součet délek $|AX| + |BX| + |CX|$ je minimální.

208. Body A, B leží v téže polorovině s hraniční přímkou p. Najděte na přímce p bod X takový, aby součet $|AX| + |BX|$ byl minimální. Zjištěný výsledek interpretujte také fysikálně.

209. V rovině jsou dány body A, B a přímka p. Najděte na přímce p bod X takový, aby $\big||AX| - |BX|\big|$ byla a) minimální, b) maximální.

210. Minimalizace nákladů na přepravu: Ze železničního uzlu U vycházejí dvě přímé železniční tratě, které svírají ostrý úhel α. Uvnitř tohoto úhlu leží místo A. Na každé z těchto tratí byla zřízena železniční stanice tak, aby součet délek plánovaných silnic spojujících místo A s oběma stanicemi i obě stanice navzájem byl nejmenší. Určete polohu stanic.

211. Kolonisté obsadili dosud neobydlená území. Osady A, B leží na opačných březích přímého toku řeky. Určete místo, kde je třeba postavit most (co nejkratší, tedy kolmý ke břehům řeky), aby plánovaná silnice z A do B byla nejkratší.

212. V lichoběžníku $ABCD$ je dáno $|AB| = a = 8$ cm, $|BC| = b = 5$ cm, $\beta = 60°$, $\gamma = 105°$. Vypočítejte délky zbývajících stran lichoběžníku.

213. Určete délky stran a velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, je-li dáno $a = 52$ cm, $v_b = 31{,}2$ cm, $S = 330$ cm^2.

214. Radarové zařízení umístěné na 45° severní zeměpisné šířky zaregistrovalo v určitém okamžiku přesně v severním směru kosmickou loď, jejíž výškový úhel byl $\alpha = 17°$ a jejíž vzdálenost od pozorovacího místa byla $d = 600$ km. Jaká

648. Znázorněte graficky řešení nerovnice $\cos x \leq \frac{1}{2}$.

649. Je dána úsečka jednotkové délky. Sestrojte úsečku, která má délku $\sqrt{15}$.

650. Jsou dány úsečky délek a, b, c. Sestrojte úsečku délky $\dfrac{a\sqrt{a^2+b^2}}{c}$.

651. Načrtněte geometrickou interpretaci algebraických vzorců

$$(a+b)^2, \quad (a+b+c)^2, \quad (a+b)^3.$$

652. Načrtněte (popř. modelujte) všechny typy vzájemné polohy tří rovin v prostoru.

Deduktivní výstavba matematiky: Matematické věty

1. Vyslovte a dokažte větu o znaku dělitelnosti třemi resp. devíti.

2. Dokažte, že číslo $\sqrt{2}$ není číslo racionální.

3. Vyslovte a dokažte větu o počtu prvočísel.

4. Uveďte a dokažte trojúhelníkové nerovnosti.

5. Vyslovte a dokažte větu o součtu vnitřních úhlů konvexního mnohoúhelníku.

6. Vyslovte a dokažte větu o středovém a obvodovém úhlu.

7. Vyslovte a dokažte Euklidovy věty.

8. Vyslovte a dokažte Pýthagorovu větu a větu obrácenou.

9. Vyslovte a dokažte větu o logaritmu součinu.

10. Vyslovte a dokažte větu o převodu daného logaritmu na logaritmus o jiném základu.

11. Dokažte, že číslo $\log 7$ je iracionální.

12. Vyslovte jako matematickou větu a dokažte goniometrické vzorce pro dvojnásobný argument.

13. Vyslovte jako matematickou větu a dokažte goniometrické vzorce pro poloviční argument.

14. Vyslovte jako matematickou větu a dokažte goniometrické vzorce pro převod výrazu $\sin x + \cos x$ na součin.

15. Vyslovte a dokažte sinovou větu.

16. Vyslovte a dokažte kosinovou větu.

17. Vyslovte a dokažte větu o vztahu poloměru kružnice opsané a sinu vnitřních úhlů trojúhelníku.

18. Vyslovte a dokažte větu o výpočtu obsahu trojúhelníka z délek jeho stran a z velikosti úhlu jimi sevřeného.

19. Vyslovte a dokažte větu o výpočtu obsahu trojúhelníku z poloměru kružnice vepsané.

20. Vyslovte jako matematickou větu a dokažte Heronův vzorec.

21. Vyslovte jako matematickou větu a dokažte vzorec pro objem komolého jehlanu.