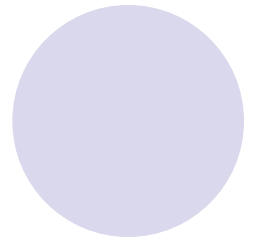
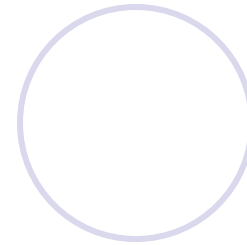
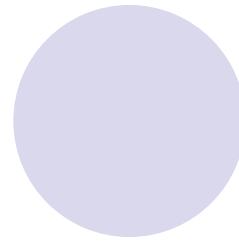
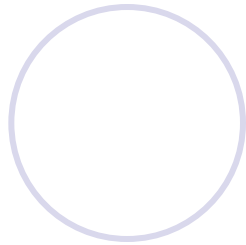
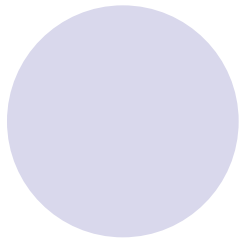


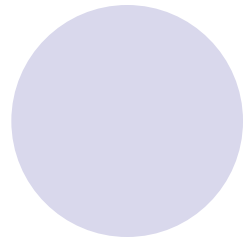
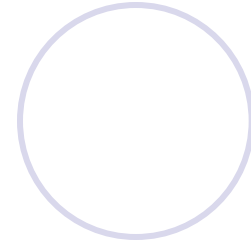
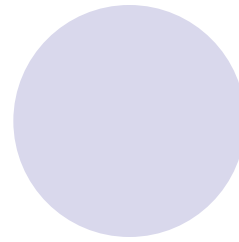
Vyhodnocení fyzikálního měření

The title is centered and overlaid on a decorative arrangement of five circles. Two circles are solid light purple, and three are hollow with a light purple outline. The circles are arranged in two rows: the top row has three circles and the bottom row has two circles.



Plocha půdorysu byla 13 itů, stěny vysoké na deset garů. Dal jsem jí šest palub, šířku jsem rozdělil devětkrát. V peci jsem roztavil šest sarů smůly. Tři sta loktů bude délka mé lodi, padesát loktů šířka a třicet loktů výška.

Epos o Gilgamešovi



Bůh řekl Noemovi: „Udělej si archu z goferového dřeva. V arše uděláš komůrky a vysmolíš ji uvnitř i zvenčí smolou. A uděláš ji takto: Délka archy bude tři sta loket, šířka padesát loket a výška třicet loket. Archa bude mít světlík; na loket odshora jej ukončíš a do boku archy vsadíš dveře.

Bible, kniha Genesis

Metody měření fyzikálních veličin

- **Definiční metoda** je založena na měření veličin obsažených v definici měřené fyzikální veličiny.
- **Přímá měřicí metoda** je metoda, při níž se hodnota měřené veličiny získává přímo, bez výpočtů obsahujících hodnoty jiných veličin.
- **Nepřímá měřicí metoda** je metoda, při níž se hodnota měřené veličiny určuje výpočtem ze změřených hodnot jiných veličin.

Princip měření

- látka / tělesa
- fyzikální pole

- smysly
- měřidla

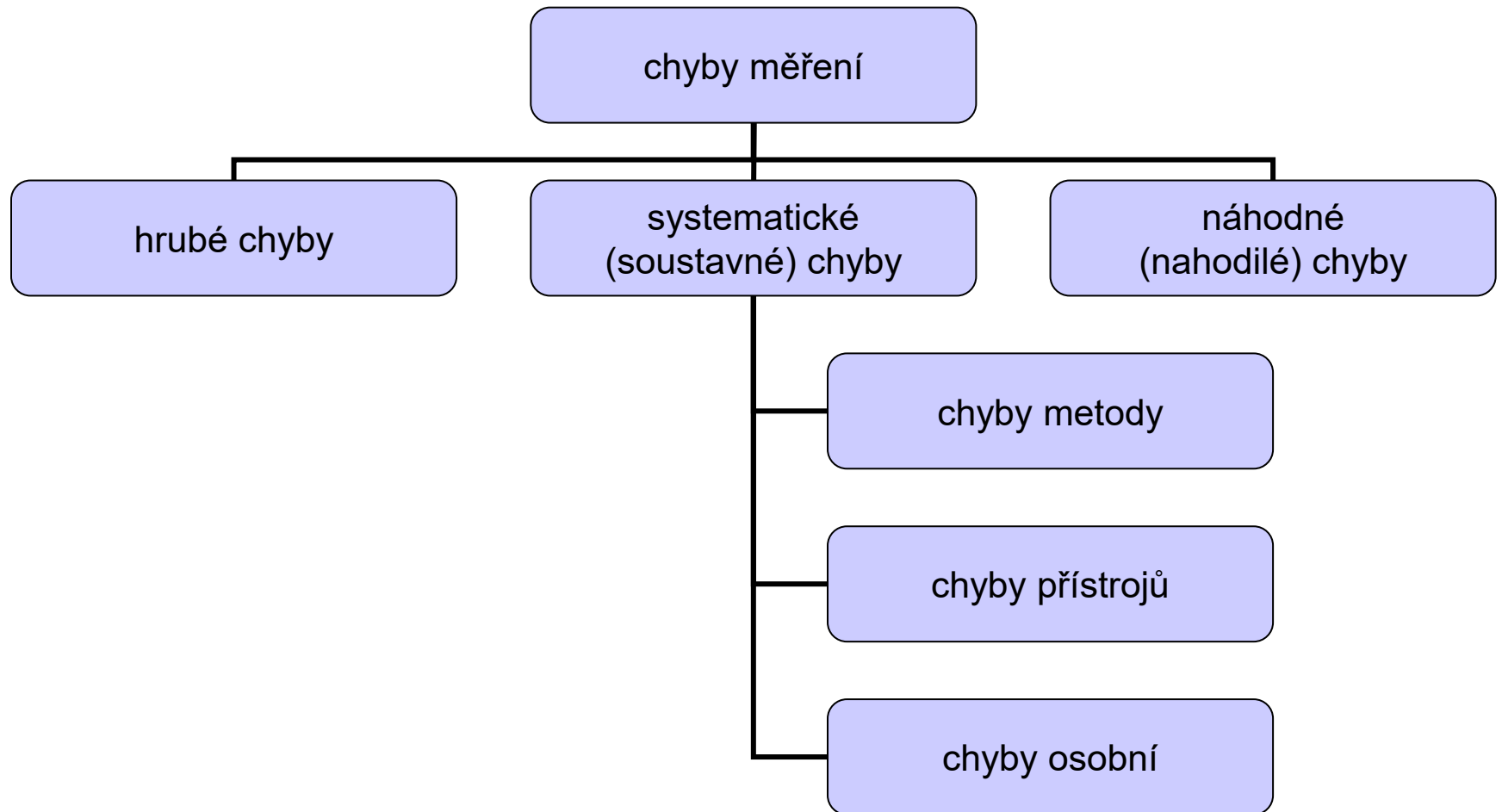
skutečná hodnota

naměřená hodnota

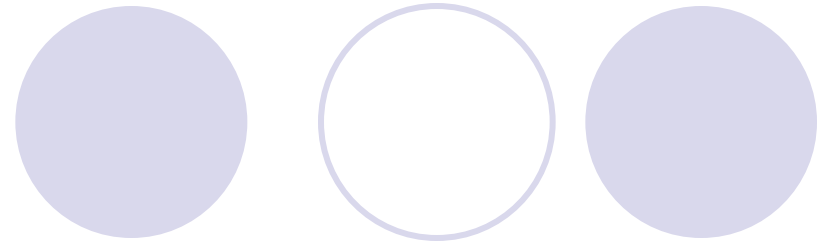
← chyba měření →



Druhy chyb měření



Hrubé chyby



- vznikají omylem experimentátora, jeho nepozorností či přehlédnutím
- vznikají např. záměnou číslic v zápisu, opomenutím některého (podstatného) kroku měření
- hodnoty získané měřením, při němž došlo k hrubé chybě, je třeba ze souboru naměřených hodnot vyloučit

l / mm
12,35
12,34
12,36
21,34
12,35

Systematické (soustavné) chyby

- se při opakovaném měření (za stejných podmínek) projevují stále stejně:
 - **chyby metody** – vznikají nedokonalostí, neúplností či nevhodností použité metody měření;
 - **chyby přístrojů** – nepřesnost přístrojů způsobená např. nedokonalou stupnicí;
 - **chyby osobní** – např. doba nervové reakce při měření času stopkami.

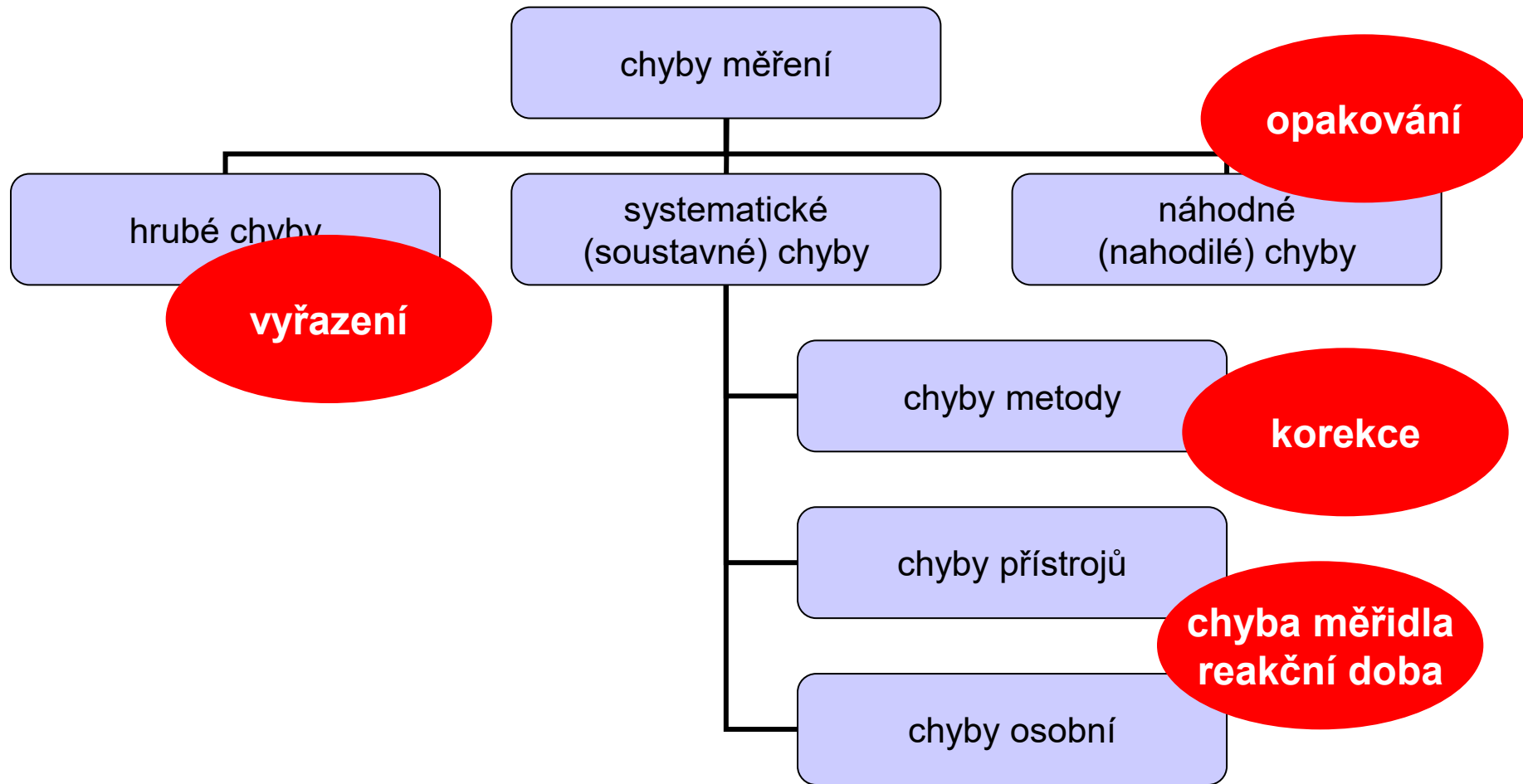
Systematické (soustavné) chyby

- se při opakovaném měření (za stejných podmínek) projevují stále stejně:
 - **chyby metody** – vznikají nedokonalostí, neúplností či nevhodností použité metody měření;
 - **chyby přístrojů** – nepřesnost přístrojů způsobená např. nedokonalou stupnicí;
 - **chyby osobní** – např. doba nervové reakce při měření času stopkami.

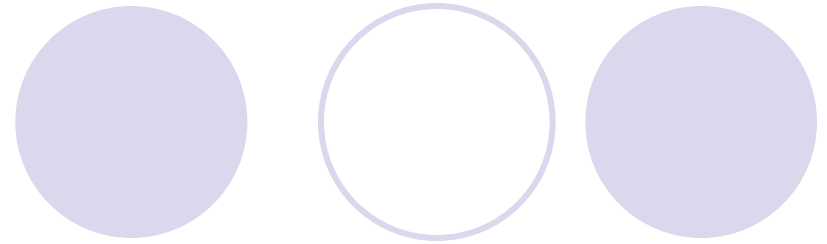
Náhodné (nahodilé) chyby

- jsou výsledkem vlivů nepravidelných dějů, jejichž účinky se náhodně skládají
- příčiny: náhlé změny tlaku, teploty, vlhkosti vzduchu v místě měření, nesprávné ustavení přístroje, změny teploty měřicího zařízení, změny fyzikálních polí v místě měření
- měření se několikrát opakuje a získané výsledky se analyzují statisticky

Počítání s chybami



Chyba měřidla



Chyba měřidla m je často uvedena výrobcem v dokumentaci měřidla. Jde zpravidla o polovinu nejmenšího dílku stupnice měřidla, jak ukazuje následující přehled:

milimetrové měřítko	0,5 mm
posuvné měřítko	0,05 mm
mikrometr	0,01 mm
stopky	0,3 s
teploměr	1/2 nejmenšího dílku

Chyba opakovaných měření

- výsledky provedených měření zpracujeme statisticky

Příklad:

Opakovaná měření (téže veličiny)

- Adamovo měření

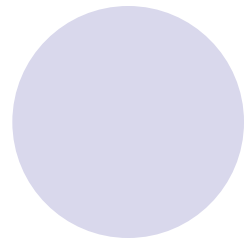
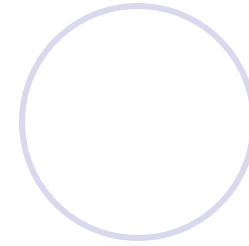
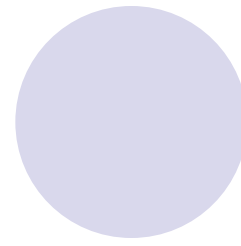
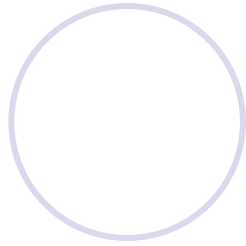
43,78
44,54
55,03
55,09
56,88
42,42
51,35
51,19
47,73
51,84
50,02
52,51
56,78
49,10
51,92
55,82
48,02
44,13
46,94
51,35

- Bářino měření

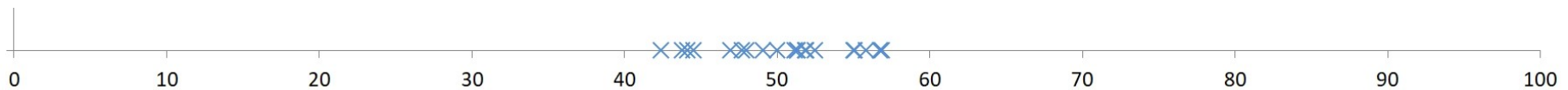
30,81
35,93
61,59
57,55
52,49
54,85
37,81
47,74
54,89
61,53
46,87
45,77
51,94
32,66
50,25
39,68
45,73
51,86
49,95
30,96

- Které měření je přesnější?

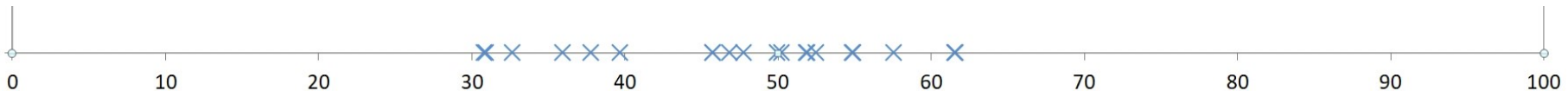
Příklad



● Měření Adam

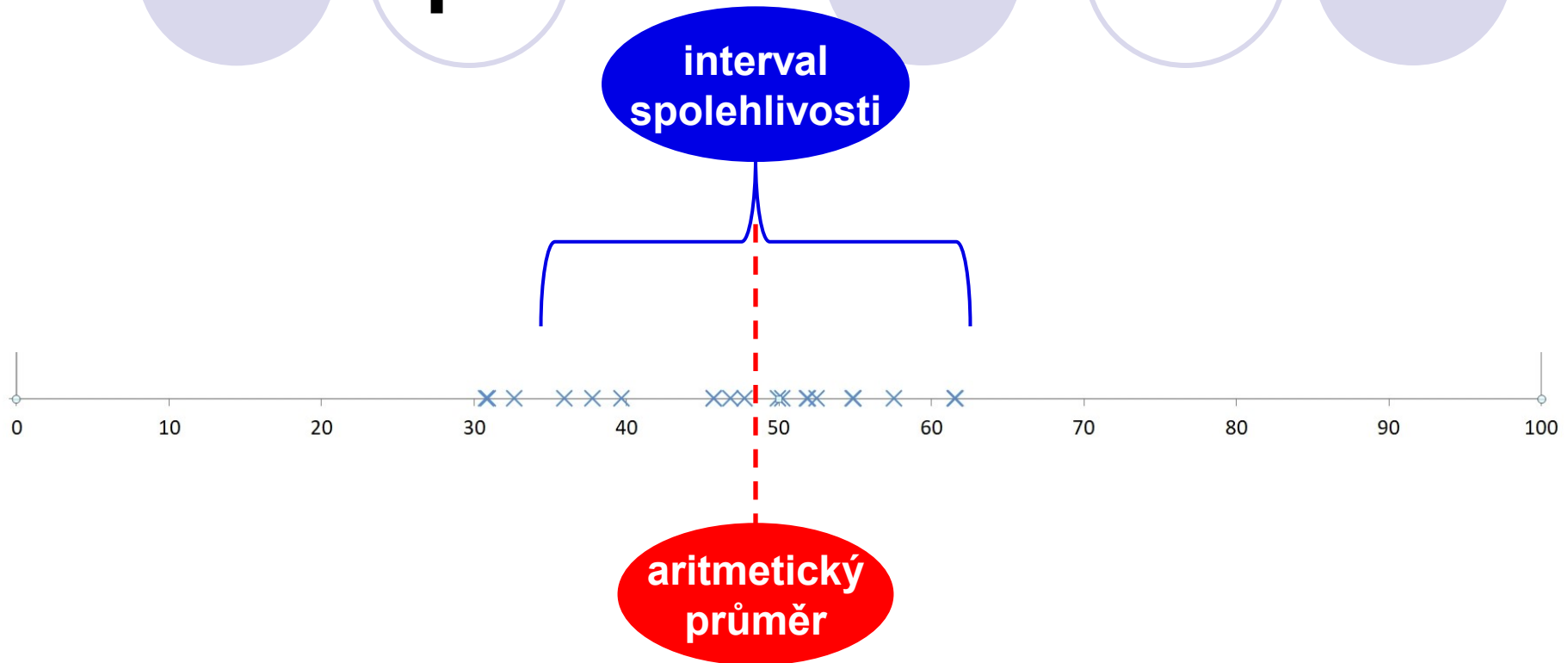


● Měření Bára



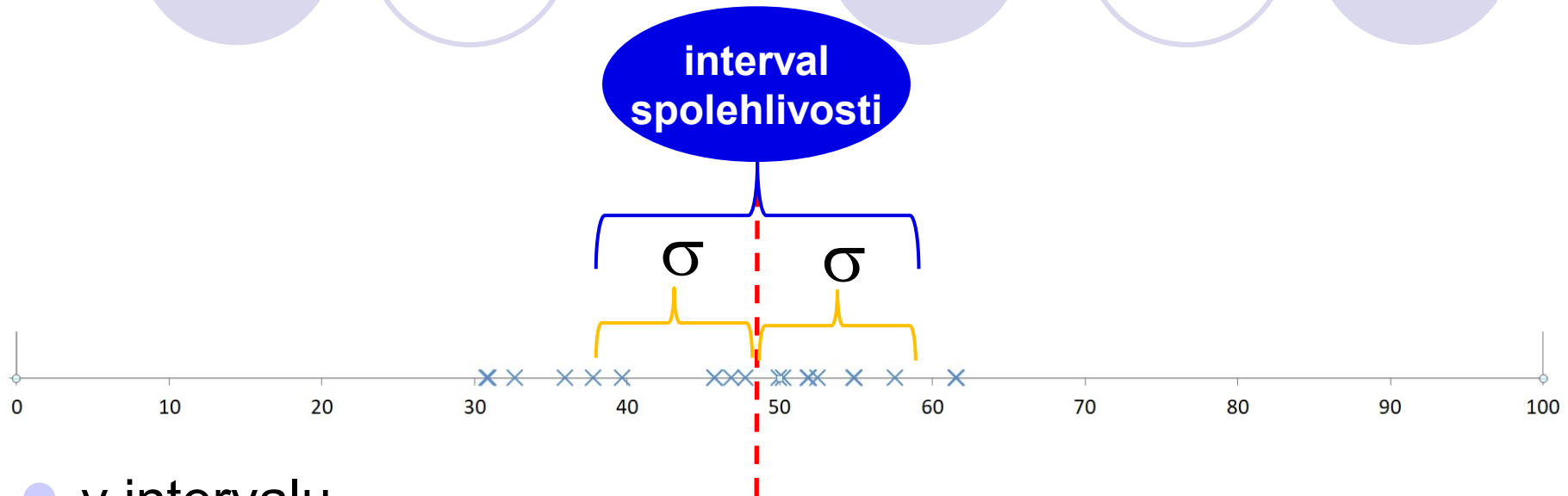
- Které měření je přesnější?
- Kde nejspíše leží skutečná hodnota měřené veličiny?

Interval spolehlivosti



- interval, ve kterém se *stanovenou pravděpodobností* skutečná hodnota nejspíše leží

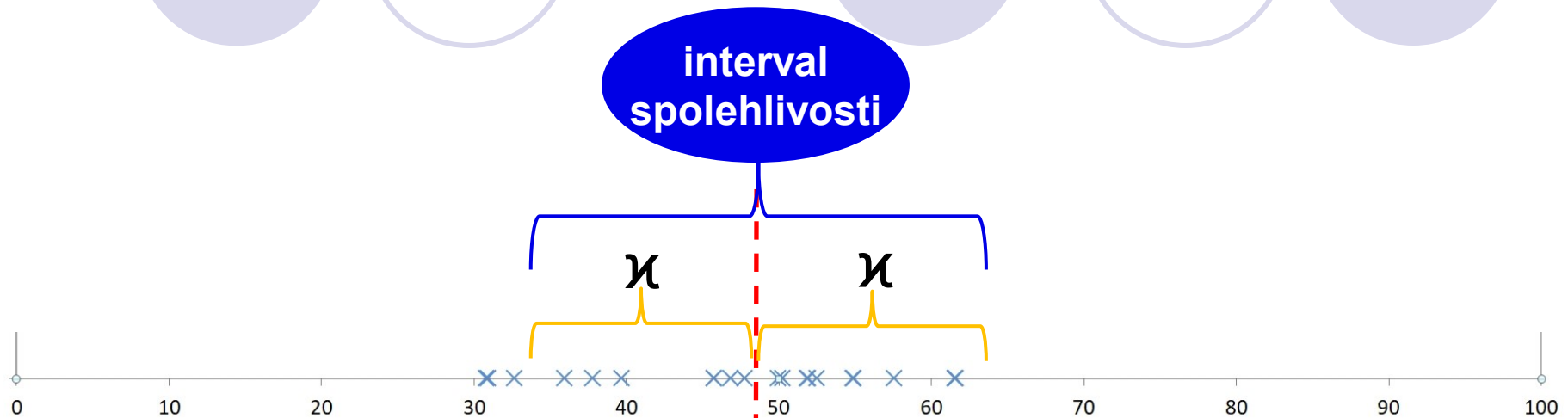
Směrodatná odchylka σ



- v intervalu spolehlivosti omezeném $\pm\sigma$ se skutečná hodnota veličiny nachází s pravděpodobností **68,27 %**

- takový interval spolehlivosti se používá nejčastěji v biologii, psychologii, společenských vědách...

Krajní chyba κ



- v intervalu spolehlivosti omezeném $\pm\kappa$ se skutečná hodnota veličiny nachází s pravděpodobností **95 %**

- takový interval spolehlivosti se používá nejčastěji ve fyzice

Interval spolehlivosti

interval spolehlivosti

- $d = (101,55 \pm 0,05) \text{ mm}$
s pravděpodobností 95 %

pravděpodobnost, že
naměřená hodnota
v daném intervalu
leží

Jak chyba měření závisí na počtu provedených měření?

Studentův součinitel t pro $P = 95\%$

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
t	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26	2,23
n	11	12	13	14	15	20	30	50	100
t	2,23	2,20	2,18	2,16	2,14	2,09	2,05	2,01	1,98

- nastavuje interval spolehlivosti dle zvolené pravděpodobnosti a provedeného počtu měření
- Student's t -distribution

William Sealy Gosset (aka *Student*)



Vyhodnocení měření

- látka / tělesa
- fyzikální pole

- smysly
- měřidla

skutečná hodnota X

aritmetický průměr
naměřených hodnot \bar{x}

směrodatná odchylka σ

výběrová směrodatná
odchylka
aritmetického průměru \bar{s}

Interval spolehlivosti

$$d = (101,55 \pm 0,05) \text{ mm s pravděpodobností } 95 \%$$

aritmetický průměr
naměřených hodnot

výsledná krajní chyba κ'

Závisí na:

- výběrové směrodatné odchylné aritmetického průměru
- počtu měření
- zvolené pravděpodobnosti
- chybě měřidla

\bar{s}

t

m

Postup výpočtu krajní chyby měření

- (1) Hodnoty x_1, x_2, \dots, x_n získané n krát opakovaným měřením zapíšeme do tabulky.
- (2) Vypočítáme aritmetický průměr \bar{x} všech naměřených hodnot.
- (3) Vypočteme odchylky Δ_i naměřených hodnot x_i od aritmetického průměru \bar{x} podle vztahu $\Delta_i = x_i - \bar{x}$, zapíšeme je do tabulky. Do dalšího sloupce zapíšeme druhé mocniny odchylek, tzn. Δ_i^2
- (4) Pro kontrolu sečteme hodnoty odchylek Δ_i . Součet musí být roven nule.
- (5) Vypočteme výběrovou směrodatnou odchylku aritmetického průměru

$$\bar{s} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n(n-1)}}.$$

- (6) V závislosti na počtu provedených měření n vyhledáme v TAB. 3 příslušnou hodnotu t .
- (7) Vypočteme krajní chybu χ dle vztahu

$$\chi = t\bar{s}.$$

Postup výpočtu krajní chyby měření

- (8) Zjistíme chybu měřidla m . Celkovou krajní chybu κ' vypočteme ze vztahu $\kappa' = \sqrt{\kappa^2 + m^2}$ a zaokrouhlíme na jednu platnou cifru.
- (9) Aritmetický průměr zaokrouhlíme na takový řád, jaký má po zaokrouhlení na jednu platnou cifru κ' . Výsledek měření pak zapíšeme intervalem spolehlivosti s vyznačenou pravděpodobností:

$$x = (\bar{x} \pm \kappa') \text{ s pravděpodobností } 95 \text{ \%}.$$

- (10) Pro další výpočty si spočteme a poznamenejme výslednou relativní krajní chybu:

$$\kappa'_r = \frac{\kappa'}{\bar{x}}.$$

Příklad 1. Měření délky mikrometrem.

i	l / mm	Δ_i / mm	Δ_i^2 / mm^2
1	8,00		
2	7,89		
3	7,70		
4	7,90		
5	9,40		
6	9,80		
7	7,95		
8	7,89		
9	7,92		
10	7,87		
Σ			
$l =$ mm			

Výběrová směrodatná
odchylka aritmetického
průměru

$$s = \text{mm}$$

Studentův součinitel

$$t =$$

Krajní chyba opakovaných
měření

$$x = \text{mm}$$

Krajní chyba měřidla

$$\eta = \text{mm}$$

Výsledná krajní chyba

$$x' = \text{mm}$$

--

Zaokrouhlování

Vypočteno:

$$l = (9,456 \pm 0,247) \text{ m}$$

$$l = (9,446 \pm 0,277) \text{ m}$$

$$m = (13,35 \pm 2,1) \text{ kg}$$

$$m = (13,3 \pm 0,027) \text{ kg}$$

$$\sigma = (17\,657\,324 \pm 175\,789) \text{ Pa}$$

$$P = (152 \pm 13) \text{ W}$$

Zaokrouhlování

Vypočteno:

$$l = (9,456 \pm 0,247) \text{ m}$$

$$l = (9,446 \pm 0,277) \text{ m}$$

$$m = (13,35 \pm 2,1) \text{ kg}$$

$$m = (13,3 \pm 0,027) \text{ kg}$$

$$\sigma = (17\,657\,324 \pm 175\,789) \text{ Pa}$$

$$P = (152 \pm 13) \text{ W}$$

Zaokrouhleno:

$$l = (9,5 \pm 0,2) \text{ m}$$

$$l = (9,4 \pm 0,3) \text{ m}$$

$$m = (13 \pm 2) \text{ kg}$$

$$m = (13,30 \pm 0,03) \text{ kg}$$

$$\sigma = (17\,700\,000 \pm 200\,000)$$

$$P = (150 \pm 10) \text{ W}$$

Příklad 1. Měření délky mikrometrem.

i	l / mm	Δ_i / mm	Δ_i^2 / mm^2
1	8,00	-0,232	0,0538240
2	7,89	-0,342	0,1169640
3	7,70	-0,532	0,2830240
4	7,90	-0,332	0,1102240
5	9,40	1,168	1,3642240
6	9,80	1,568	2,4586240
7	7,95	-0,282	0,0795240
8	7,89	-0,342	0,1169640
9	7,92	-0,312	0,0973440
10	7,87	-0,362	0,1310440
Σ	82,32	0	4,81176
$l = 8,2320 \text{ mm}$			

Výběrová směrodatná
odchylka aritmetického
průměru

$$s = 0,2312228 \text{ mm}$$

Studentův součinitel

$$t = 2,26$$

Krajní chyba opakovaných
měření

$$x = 0,52256361 \text{ mm}$$

Krajní chyba měřidla

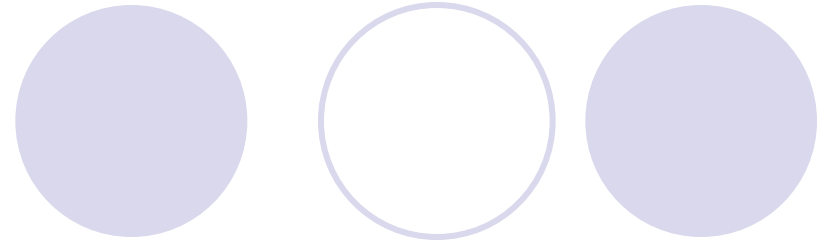
$$w = 0,01 \text{ mm}$$

Výsledná krajní chyba

$$x' = 0,522659283 \text{ mm}$$

$$l = (8,2 \pm 0,5) \text{ mm}$$

Řešení v MS Excel



- Jak to celé urychlit?

Příklad 1. Měření délky mikrometrem.

i	l / mm
1	8,00
2	7,89
3	7,70
4	7,90
5	9,40
6	9,80
7	7,95
8	7,89
9	7,92
10	7,87

Průměr $l = \text{=PRŮMĚR}(C5:C14)$ mm

Výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru $s = \text{=SMODCH.VÝBĚR}(C5:C14)/\text{ODMOCNINA}(10)$ mm

Studentův součinitel $t =$

Krajní chyba opakovaných měření $\kappa = \text{=E18*E19}$ mm

Krajní chyba měřidla $m =$ mm

Výsledná krajní chyba $\kappa' = \text{=ODMOCNINA}((\text{E20})^2+(\text{E21})^2)$ mm

$$l = (8,2 \pm 0,5) \text{ mm}$$