

Fyzikální měření pro gymnasia

III. část

Mechanické kmitání a vlnění

Gymnasium F. X. Šaldy • Honsof

Liberec 2008

ÚVODNÍ POZNÁMKA EDITORA

Obsah. Třetí část publikace *Fyzikální měření pro gymnasia* obsahuje návody k laboratorním pracím z mechanického kmitání a vlnění (akustiky). Je určena pro laboratorní cvičení z fyziky v prvním pololetí třetího ročníku (resp. septimy). Konkrétní výběr úloh odpovídá mj. vybavení fyzikální laboratoře Gymnasia F. X. Šaldy. Protože některé pomůcky (kyvadla, ladičky, čidla měřících systémů) nejsou k dispozici ve více exemplářích, věnuje se každá skupina během jednoho cvičení jiné úloze; v dalších týdnech se skupiny permutují. Aby mohla každá skupina pracovat samostatně, jsou v této brožuře shrnuty návody ke všem měřeným úlohám.

Uspořádání. V textech pro jednotlivé úlohy jsou uvedeny úkoly, pomůcky a postupy; kromě toho tam lze zpravidla najít i inspiraci k teoretickému úvodu, zpracování měření a závěru. Tato inspirace je někdy formou otázek; cílem však není odpovídat na otázky, nýbrž zformulovat samostatný, souvislý, smysluplný text (těmito otázkami inspirovaný). Podrobnosti o obsahu a formě referátů jsou ostatně na webu vyučujícího <http://jan.gfxs.cz/>. Nutno připomenout, že ke zpracování referátů o měření předložených úloh jsou nutné znalosti z první části učebního textu, zejména znalosti o stanovení chyb měření či o konstrukci grafů. Na tuto první část se návody k úlohám soustavně, implicitně odvolávají.

Zdroje a autoři úloh. Vzhledem k vybavení fyzikálních laboratoří nelze vymýšlet příliš „originální“ úlohy, proto i předkládané návody jsou spíše kompilací dříve vydaných učebních textů pro laboratorní měření. Bylo čerpáno z gymnaziálních učebnic i vysokoškolských skript, zejména z knihy [ŽL]; seznam literatury je uveden v závěru tohoto sešitu. Cenným zdrojem inspirace byly editorovi laboratorní úlohy zadávané jeho vyučující J. Kuglerovou. Popis měření systémem IP Coach je převzat z projektu *Fyzikální měření podporované počítačem* (projekt SIPVZ 0547P2006), jehož řešiteli byli V. Pěnička a J. Voženílek.

Zpracování. Návody byly napsány v systému $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$. V textu nejsou obrázky a vzory tabulek; laboranti případně dostanou potřebnou informaci od vyučujícího.

–jvk–

SPŘAŽENÁ KYVADLA

Pracovní úkol

Určete závislost rázu spřažených kyvadel na jejich vazbě.

Pomůcky

Spřažená kyvadla, závaží, stopky, měřítko.

Teoretický úvod

- Uveďte krátkou informaci o **spřažených kyvadlech** (pojmy **oscilátor**, **rezonátor**).

Pracovní postup

- (1) Kyvadla umístíme do vzdálenosti 30 cm od sebe a spojíme je nití, na kterou postupně doprostřed zavěšujeme závaží do celkové hmotnosti 50 gramů (po 5 g).
- (2) Pozorujeme, za jakou dobu se rozkmitané kyvadlo zastaví a předá zcela svou energii druhému kyvadlu. Počáteční amplitudu, asi 15 cm, udržujeme pro všechna měření stejnou.
- (3) Jednotlivé hodnoty periody zapíšeme do tabulky a sestojíme graf závislosti periody na hmotnosti vazby.
- (4) Měření provedeme pro pět různých vzdáleností (l_1, l_2, \dots, l_5) vlákna od osy kyvadel.
- (5) Měření má kvalitativní charakter; chybu měření nebudeme vyhodnocovat.

Zpracování výsledků měření

- Tabulky (pět tabulek pro pět různých vzdáleností vlákna od osy kyvadel).
- Nákres kyvadla.
- Graf závislosti T na m (pět křivek pro pět různých vzdáleností v jednom obrázku).

Náměty pro závěr

- Jak se mění doba kmitu s rostoucí hmotností vazby?
- Jaké nepřesnosti, zanedbání apod. ovlivňují výsledek měření?
- Jak by bylo možno měření zpřesnit, vylepšit?

BLACKBURNOVO KYVADLO

Pracovní úkol

Studujte Lissajousovy obrazce pomocí Blackburnova kyvadla.

Pomůcky

Blackburnovo kyvadlo, podložní deska, jemný písek, měřítko, digitální fotoaparát, počítač, aplikace Lissajousovy obrazce (popř. systém Famulus, IP Coach či obdobný).

Teoretický úvod

Blackburnovo kyvadlo je zařízení sloužící k demonstraci Lissajousových obrazců, které vznikají při skládání kolmých kmitů. Toto kyvadlo lze přibližně považovat za dvě matematická kyvadla, jejichž délky lze měnit pomocí společného třmenu. Roviny kyvů obou kyvadel jsou vzájemně kolmé. Ze vzorce

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1)$$

pro dobu kmitu matematického kyvadla plyne pro poměry délek kyvadel a dob jejich kmitů rovnost

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{l_1}}{\sqrt{l_2}}; \quad (2)$$

tedy např. má-li poměr $T_1 : T_2$ být 2:3, nastavíme poměr délek kyvadel 4:9.

Pracovní postup

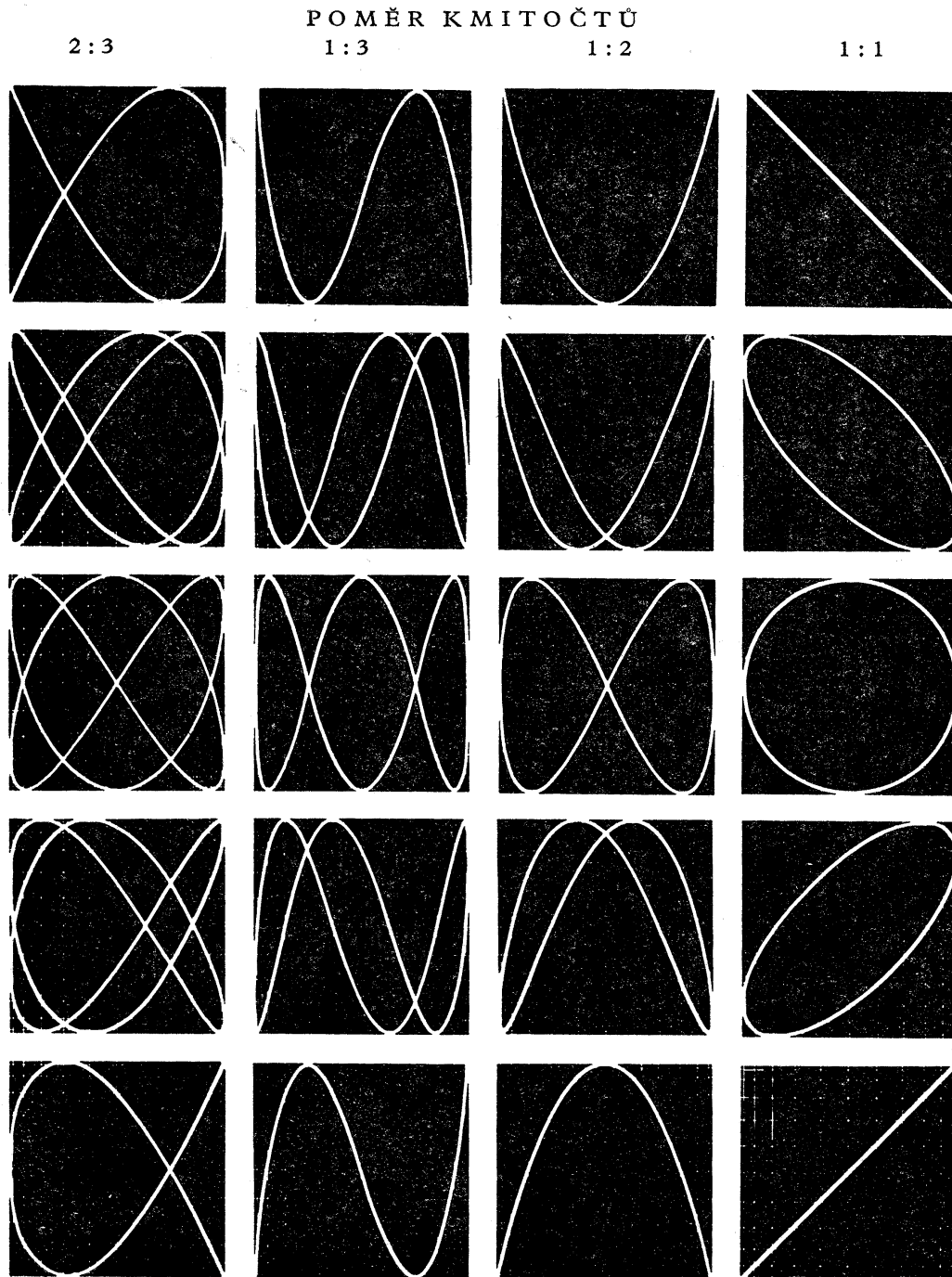
- (1) V aplikaci *Lissajousovy obrazce* (popř. v analogickém modelu vytvořeném v systému Famulus či IP Coach) nastavíme vhodné (v obou směrech stejné) amplitudy (např. 2).
- (2) Nastavíme poměr period (resp. úhlových frekvencí) postupně 1:1, 1:2, 1:3, 2:3. Při každém nastavení volíme fázová posunutí φ_1 , resp. φ_2 jako jeden z úhlů 0° , 45° , 90° , 135° , 180° . Necháme vykreslit příslušný obrazec a uložíme jej. Porovnáme s obrazci v OBR. 1.
- (3) Nastavíme délky kyvadel podle vztahu (2) tak, aby poměry $T_1 : T_2$ byly postupně 1:1, 1:2, 1:3, 2:3, tedy $l_1 : l_2$ budou postupně 1:1, 1:4, 1:9, 4:9.
- (4) Pod nálevku kyvadla umístíme černý papír. Otvor nálevky ucpeme; naplníme ji pískem nebo krupicí asi do jedné třetiny jejího objemu. Podložku (užitím hranolů) ustavíme tak, aby byla co nejbližší otvoru nálevky. Nálevku vychýlíme asi 5 cm v daném směru a vypustíme ji tak, aby vykonávala volný, klidný pohyb.
- (5) Písek vytékající z nálevky vytváří na podložce **Lissajousovy obrazce**, které vznikly skládáním dvou kolmých harmonických kmitů. Kyvadlo necháme proběhnout trajektorii dvakrát až třikrát, mělo by opisovat stejnou křivku. Výsledné obrazce vyfotografujeme.
- (6) Kyvadlo vypouštíme tak, abychom dostávali obrazce zjištěné modelováním na počítači.

Zpracování výsledků měření

- Nákres kyvadla.
- Obrázky získané vyfotografováním (a případnou další úpravou) „pískových“ obrazců.
- Obrazce zjištěné modelováním pomocí počítače.

Náměty pro závěr

- Porovnání obrazců získaných experimentálně a obrazců získaných počítačem s obrazci uvedenými v literatuře (viz např. OBR. 1 převzatý z [Hla71]).
- Které vlivy případně způsobily, že se obrazce získané experimentálně liší od obrazců zjištěných výpočtem?



OBR. 1

MATEMATICKÉ KYVADLO

Pracovní úkol

Určete tíhové zrychlení užitím matematického kyvadla.

Pomůcky

Stopky, metr, improvizované matematické kyvadlo (ocelová kulička na niti), stojan.

Teoretický úvod

- Uveďte vztah pro dobu kmitu **matematického kyvadla**. Připojte podmínky, za kterých byl vztah odvozen. Vysvětlete fyzikální význam **tíhového zrychlení g** .
- Ukažte odvození vzorce pro tíhové zrychlení

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}. \quad (1)$$

Pracovní postup

- (1) Kuličku na niti upevníme závěsem na stojan, změříme délku niti l . Měření opakujeme desetkrát, stanovíme chybu měření (jako chybu opakovaného měření a chybu měřidla).
- (2) Kyvadlo vychýlíme asi o 5° a změříme dobu deseti kmitů ($10T$), měření opakujeme desetkrát. Stanovíme chybu měření $10T$ (chyba opakovaného měření, chyba měřidla).
- (3) Z doby deseti kmitů stanovíme dobu jednoho kmitu T ; chybu této veličiny určíme jako chybu nepřímého měření.
- (4) Dle vztahu (1) vypočteme tíhové zrychlení; chybu g stanovíme jako chybu nepřímého měření.
- (5) Body (1)–(4) provedeme postupně třikrát, pro 3 různé délky matematického kyvadla

Zpracování výsledků měření

- Tři tabulky popisující měření délky.
- Tři tabulky popisující měření $10T$ pro jednotlivé délky kyvadla.
- Trojí výpočet g pro jednotlivá měření příslušející různým délkám kyvadla.
- Nákres kyvadla.

Náměty pro závěr

- Porovnejte naměřená g s tabulkovou hodnotou pro místo měření.
- Pro kterou délku kyvadla bylo měření nejpřesnější? Bylo by přesnější vzít jako výsledek měření aritmetický průměr všech tří naměřených hodnot g ? (Opět porovnejte s tabulkami.)

MĚŘENÍ FREKVENCE KMITÁNÍ

Pracovní úkol

Určete frekvence předložených ladiček a) rezonanční metodou, b) užitím systému IP Coach.

Pomůcky

Válcová nádoba, skleněný válec, ladičky, kladívko, milimetrové měřítko, trubice, čidlo akustického tlaku D017i, IP Coach.

Teoretický úvod

Kmitavým pohybem rozumíme pohyb, při němž se těleso (resp. hmotný bod) vychyluje v různých směrech od své rovnovážné polohy. Doba T , po které se průběh pohybu pravidelně opakuje, se nazývá **perioda (doba kmitu)**. **Frekvence (kmitočet)** je dána vztahem:

$$f = \frac{1}{T};$$

jednotkou je **hertz**. Šíří-li se kmitavý rozruch prostředím, nazývá se tento děj **vlnění**.

Klasické metody měření frekvence jsou postaveny na využití **rezonance zvukového vlnění** ve vzduchovém sloupci např. v dlouhém skleněném válci; jeden konec válce je volný, druhý je uzavřen vodní hladinou. V trubici částečně naplněné vodou nastane rezonance vzduchového sloupce při frekvenci f ladičky, bude-li u otevřeného konce trubice kmitna a na vodní hladině uzel. Potom pro možné délky vzduchového sloupce platí

$$d_1 = \frac{1}{4}\lambda, \text{ resp. } d_2 = \frac{3}{4}\lambda, \text{ resp. } d_3 = \frac{5}{4}\lambda \text{ atd.} \quad (1)$$

Jednoduchou úpravou dostáváme vztah

$$d_3 - d_2 = d_2 - d_1 = \frac{\lambda}{2}, \quad (2)$$

z něhož vlnovou délku λ snadno vyjádříme. Pokud je ovšem válec tak krátký, že lze najít pouze jednu délku d_1 , při které dochází k rezonanci, užijeme jen první část vzorce (1), tedy vztah $d_1 = \lambda/4$.

Frekvence je dána vztahem

$$f = v/\lambda, \quad (3)$$

kde v je rychlost šíření zvuku v daném prostředí *při teplotě měření*. Rychlost v vyhledáme v seriózních tabulkách nebo určíme dle empirického vztahu:

$$v = (331,82 + 0,61 \{t\}) \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, \quad (3)$$

kde t je Celsiova teplota vzduchu

Systém **IP Coach** umožňuje měření jednodušším způsobem: pouhým spočtením period v časovém diagramu kmitání.

Pracovní postup

- (1) Do válcové nádoby nalejeme vodu. Vedle postavíme stojan s připevněným milimetrovým měřítkem.
- (2) Rozezvučíme ladičku a přiložíme ji těsně k hornímu konci trubice, kterou posouváme v nádobě s vodou, dokud nedojde k rezonanci (zesílení zvuku).
- (3) Hledáme postupně všechny polohy trubice, kdy se tón ladičky nejvíce zesílí. Je-li trubice dostatečně dlouhá a tón dostatečně vysoký, jsou takové polohy aspoň dvě; pro každý případ změříme milimetrovým měřítkem vzdálenost horního okraje trubice od volné hladiny.
- (4) Měření provedeme pro každou ladičku dvacetkrát, určíme výsledné délky d_1 (popř. – podle délky válce – i d_2, d_3). (Chybu měření určíme jako chybu opakovaného měření, započteme i chybu měřidla.)
- (5) Pomocí vztahů (2) a (3) určíme frekvenci ladičky; stanovíme chybu nepřímého měření.
- (6) Čidlo akustického tlaku upevníme do stojanu.
- (7) Nastavíme vysokou vzorkovací frekvenci čidel (např. $1000\times$ za milisekundu); doba měření může být krátká (1 s).
- (8) Dřevěným kladívkem rozezvučíme ladičku a zahájíme měření.
- (9) V grafu spočítáme počet period v době 1 cs (resp. – jsme-li trpělivější – v době 1 ds) a vynásobíme 100 (resp. 10) – tak přímo stanovíme frekvenci ladičky.

Zpracování výsledků měření

- Pro každou ladičku: dvě tabulky s dvaceti hodnotami d_1, d_2, d_3 , výpočet průměrných hodnot a chyb měření; výpočty dle vztahů (2) a (3) včetně výpočtu chyb měření.
- Nákres aparatury.
- Pro každou ladičku: graf získaný systémem IP Coach a výpočet na základě grafu.
- Frekvenci ladičky lze v IP Coach také najít Fourierovou analýzou uvažovaného kmitání. Právým tlačítkem myši zvolíme **Analyzovat / Analýza signálu**, v roletovém nabídce najdeme **Fourierova transformace** a výsledný diagram necháme zkonstruovat do prázdného okna. Maximum grafu odpovídá základní frekvenci ladičky.

Náměty pro závěr

- Porovnání rezonanční metody a měření systémem IP Coach.
- Analýza nepřesností měření, návrhy na zpřesnění metody.
- Porovnání výsledků měření s údaji uvedenými na ladičkách.

MĚŘENÍ NA OCELOVÉ PRUŽINĚ

Pracovní úkol

1. Určete, jak závisí délka pružiny na velikosti síly napínající pružinu. Sestrojte graf zkoumané závislosti.
2. Určete, jak závisí doba kmitu pružiny na hmotnosti závaží, sestrojte graf této závislosti.
3. Vypočtete tuhost použité pružiny užitím výsledků předchozích úkolů.
4. Stanovte periodu kmitání pružiny videoměřením; vypočtete tuhost pružiny.

Pomůcky

Stojan, měřítko, stopky, ocelová pružina, závaží. Digitální fotoaparát, stativ, posuvné měřítko, software IP Coach.

Teoretický úvod

Kmitavý pohyb tělesa o hmotnosti m , zavěšeného na pružině, je působen silou o velikosti F , která je přímo úměrná okamžité výchylce y , tedy

$$F = ky. \quad (1)$$

Konstanta k se nazývá **tuhost pružiny**. Užitím vztahů¹⁾

$$F = ma, \quad a = \omega^2 y \quad (2)$$

dostáváme z (1) vztah pro výpočet tuhosti pružiny

$$k = m\omega^2 = 4\pi^2 \frac{m}{T^2}. \quad (3)$$

Jinou možností je využití vztahu (1) a grafu závislosti y na F . Napíšeme-li totiž závislost ve tvaru $y = \xi F$, můžeme hodnotu ξ získat jako směrnici přímky, jíž proložíme naměřené hodnoty. Porovnáním se vztahem (1) pak snadno dostaneme rovnost

$$k = \frac{1}{\xi}. \quad (4)$$

Pracovní postup

- (1) Ocelovou pružinu délky y_0 zavěsíme na stojan a zatěžujeme postupně závažím o hmotnosti cca 50 g, 100 g, 150 g, . . . , 500 g. Hmotnosti závaží určíme pomocí elektronické váhy.
- (2) Pomocí měřítka odečteme při každém zatížení délku pružiny y_i , vypočítáme prodloužení $\Delta y_i = y_i - y_0$; pro každou hmotnost závaží m_i vypočteme velikost tíhové síly napínající pružinu $F_i = m_i g$. (Počítáme s hodnotou g příslušnou místu měření; vyhledáme ji v seriálních tabulkách.)
- (3) Mírným protažením pružinu při každém zatížení rozkmitáme a změříme její dobu kmitu T průměrem z 20 kmitů.

¹⁾ Pokud čtenář v uvedených vztazích postrádá místy znaménko $-$, necht' si uvědomí, že zde není řeč o *souřadnici* vektoru, nýbrž o jeho *velikosti*.

- (4) Pro dané m a T určíme tuhost pružiny dle vztahu (3).
- (5) Popsané činnosti a výpočty provedeme pro všechny hmotnosti závaží uvedené v bodu (1) postupu.
- (6) Sestrojíme graf závislosti y na F ; z grafu určíme tuhost pružiny k pomocí směrnice přímky, již naměřené hodnoty proložíme.
- (7) Sestrojíme graf závislosti doby kmitu T na hmotnosti závaží m .
- (8) Pružinu se zvoleným závažím zavěsíme na stojan doplněný posuvným měřítkem s nastavenou kalibrační délkou (např. 10 cm); jedna z čelistí měřidla označuje rovnovážnou polohu závaží.
- (9) Fotoaparát upevníme na stativ; v záběru musí být vidět pohybující se závaží i posuvné měřítko. Nastavíme režim **Filmován**. Závaží rozkmitáme a několik period kmitavého pohybu zaznamenejme. Záznam zkopírujeme do počítače.
- (10) Nad oknem Videosekvence ve vzorovém sešitu klikneme pravým tlačítkem, zvolíme **Otevřít videosekvenci**, v dalším okně zvolíme **Přidat** a vyhledáme soubor se záznamem měření. (Je-li to požadováno, odsouhlasíme odstranění dříve naměřených hodnot.)
- (11) Opět klikneme pravým tlačítkem myši nad videosekvencí, zvolíme **Kalibrace souřadnic**. V prvním okně ponecháme původní nastavení; ve druhém okně zapíšeme délku kalibračního měřítka (10 cm); tuto délku také označíme v záznamu červenou úsečkou. Žluté osy soustavy souřadnic umístíme tak, aby počátek soustavy souřadnic byl v rovnovážné poloze; svislá osa přitom prochází pružinou.
- (12) Užitím posuvníku projdeme záznam a zaznamenejme si čísla snímků, v nichž bude probíhat měření; vybereme několik period od počátku samostatného pohybu závaží. Pravým tlačítkem zvolíme **Snímky** a rozsah vybraných snímků zapíšeme do pole **Výběr výčtem**.
- (13) Zeleným tlačítkem v horní liště zahájíme měření. Zaměřovačem označíme polohu referenčního bodu v každém snímku. IP Coach automaticky vyplňuje tabulku a konstruuje graf.
- (14) Z grafu odečteme hodnotu periody T ; ze vztahu (3) vypočteme tuhost pružiny. Chybu měření při užití této metody nebudeme stanovovat.

Zpracování výsledků měření

- Tabulka s naměřenými hodnotami a vypočteným k pro jednotlivá T a m . (Deset hodnot k pro deset provedených měření.) Určení průměrné hodnoty k .
- Výpočet krajní chyby k jako chyby nepřímých měření pro jedno libovolně zvolené měření z deseti provedených. Přitom $\chi'(m)$ je krajní chyba elektronických vah; $\chi'(T)$ se stanoví jako chyba nepřímého měření z doby $T' = 20$ kmitů, kde $\chi'(T')$ se rovná krajní chybě užitých stopek; zpravidla tedy 0,3 s. K tomu srov. poznámku 1 v závěru návodu.
- Graf závislosti y na F . Proložení grafu přímkou, stanovení k z její směrnice ξ .
- Graf závislosti doby kmitu T na hmotnosti závaží m .
- Graf zkonstruovaný systémem IP Coach a výpočet na základě grafu.

Náměty pro závěr

- Byly provedeným měřením experimentálně ověřeny „teoretické“ poznatky o prodloužení pružiny? (Jaké poznatky to jsou?)
- Jakou křivkou lze v grafu závislosti doby kmitu T na hmotnosti závaží m proložit naměřené hodnoty?
- Které okolnosti při pořizování videozáznamu ovlivňují přesnost videoměření?

Poznámka 1. Nejvhodnější metodou vyhodnocení měření by bylo provedení lineární regrese, které umožňuje stanovit hodnotu k i hodnotu směrodatné odchylky této veličiny. Lineární regrese je popsána ve 4. části tohoto učebního textu; zájemci ji mohou prostudovat a použít. Ostatní čtenáři se musejí smířit s tím, že chybu výsledné hodnoty k v této laboratorní práci určovat nebudou; k tak postačí určit pro jednu jednotlivou měřenou hodnotu.

Poznámka 2. Frekvenci kmitání lze v IP Coach také najít Fourierovou analýzou uvažovaného kmitání. Pravým tlačítkem myši zvolíme **Analyzovat / Analýza signálu**, v roletovém nabídce najdeme **Fourierova transformace** a výsledný diagram necháme zkonstruovat do prázdného okna.

LITERATURA

- [Bro83] Brož, J. a kol.: Základy fyzikálních měření I. 1. vyd. Praha: SPN, 1983.
- [Mád91] Mádr, V. – Knejzlík, J. – Kopečný, J. – Novotný, I.: Fyzikální měření. 1. vyd. Praha: SNTL, 1991.
- [ČMB] Čmelík, M. – Machonský, L. – Burianová, L.: Úvod do fyzikálních měření. 1. vyd. Liberec: TUL, 1999.
- [Kaz76] Kazda, V. – Soška, F.: Laboratorní cvičení z fyziky. 1. vyd. Liberec: VŠST, 1976.
- [Čme85] Čmelík, M. – Machonský, L.: Fyzikální laboratoře. 1. vyd. Liberec: VŠST, 1985.
- [ŽL] Živný, F. – Lepil, O.: Praktická cvičení z fyziky. 7. vyd. Praha: SPN, 1977.
- [Vyb02] Vybíral, B.: Zpracování dat fyzikálních měření. 1. vyd. Hradec Králové: MAFY, 2002.
- [Hla71] Hlavička, A. – Bělař, A. – Krčmešský, J. – Špelda A.: Fyzika pro pedagogické fakulty. 1. vyd. Praha: SPN, 1971.
- [Hor61] Horák, Z. – Krupka, F. – Šindelář, V.: Technická fyzika. 3. vyd. Praha: SNTL, 1961.
- [VSF] Výkladový slovník fyziky pro základní vysokoškolský kurz. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2001.
- [SŠF] Slovník školské fyziky. 1. vyd. Praha: SPN, 1988.

Kolektiv autorů

Fysikální měření pro gymnasia

III. část – Mechanické kmitání a vlnění

Sazbu v systému $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\text{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$ připravil Honsoft
Vydáno pro Gymnasium F. X. Šaldy v Liberci
v roce 2008

Vydání 4., upravené

2008 – 4.0 – 091001
